SL 62/029

VOL. 2

STATICA STABILITATEA ȘI DINAMICA CONSTRUCȚIILOR

DACIA

Alexandru CĂTĂRIG

Valeriu BĂNUȚ

Scanned with OKEN Scanner

Prof. dr. ing. ALEXANDRU CĂTĂRIG
Conf. dr. ing. VALERIU BĂNUȚ

STATICA, STABILITATEA ȘI DINAMICA CONSTRUCȚIILOR

— CALCULUL PRACTIC —

Vol. 2

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Capitolul XIII

Calculul structurilor prin aproximaţii succesive 7

Capitolul XIV

Linii de influenţă la structuri static nedeterminate 60

A. Grinzi continue 61

B. Arce static nedeterminate 76

Capitolul XV

Calculul dinamic al structurilor 86

A. Sisteme cu un singur grad de libertate 87

B. Sisteme cu mai multe grade de libertate 111

CALCULUL GEOMETRIC NELINIAR AL STRUCTURILOR

Capitolul XVI

Calculul de ordinul II al structurilor elastice 152

Capitolul XVII

Calculul de stabilitate al structurilor elastice 176

A. Stabilitatea sistemelor cu un număr finit de grade de libertate . . 179

B. Stabilitatea sistemelor cu un număr infinit de grade de libertate . . 196

1. Stabilitatea barelor cu secţiune variabilă în trepte 196

2. Stabilitatea structurilor în formă de cadre 209

Capitolul XVIII

Calculul în domeniul elasto-plastic 230

Scanned with OKEN Scanner

FORMULAREA MATRICEALA A CALCULULUI STRUCTURILOR

Capitolul XIX

Formularea matriceală a metodei deplasărilor 252

ANEXE 286

BIBLIOGRAFIE 336

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XIII

CALCULUL STRUCTURILOR PRIN APROXIMAŢII SUCCESIVE

Calculul structurilor prin metoda deplasărilor, aşa cum a fost prezentat în capitolul precedent, implică alcătuirea şi rezolvarea sistemului de ecuaţii de condiţie, operaţie care necesită un consum mare de timp. În asemenea situaţii se adoptă metode de determinare prin aproximaţii succesive a valorilor necunoscutelor, calculul efectuîndu-se în mai multe cicluri (iterativ).

Utilizarea unor asemenea metode depinde de convergenţa procesului iterativ, de rapiditatea sa.

Sistemul de ecuaţii pentru structurile cu noduri fixe are asigurată o bună convergenţă deoarece valoarea coeficientului necunoscutei principale r_{ii} este mult mai mare decît suma valorilor absolute ale tuturor coeficienţilor necunoscutelor secundare, $|r_{ii}| \gg \sum |r_{ij}|$, în fiecare ecuaţie.

Sistemul de ecuaţii pentru structurile cu noduri deplasabile respectă condiţia globală $\sum |r_{ii}| > \sum_i \sum_j |r_{ij}|$, $i \neq j$, dar în ecuaţiile de grad de libertate această condiţie nu este satisfăcută şi în consecinţă convergenţa procesului iterativ este mai lentă.

Semnificaţia fizică a celor două modalităţi de rezolvare a sistemului de ecuaţii este următoarea:

— rezolvarea directă reprezintă trecerea structurii din forma de sistem de bază (cu nodurile blocate) în forma deformată reală, prin eliminarea simultană a tuturor legăturilor suplimentare,

— rezolvarea prin aproximaţii succesive reprezintă trecerea treptată a structurii din forma de sistem de bază în forma deformată reală, prin deblocarea succesivă a nodurilor. Calculul practic se conduce pe o schemă de calcul care se confundă cu schema statică a structurii, eliminîndu-se scrierea explicită a sistemului de ecuaţii.

În acest capitol vor fi rezolvate atît structuri alcătuite din bare cu secţiune constantă, cît şi structuri care au în alcătuire bare cu secţiune variabilă.

Scanned with OKEN Scanner

Se prezintă următoarele procedee de calcul al structurilor cu noduri fixe, prin aproximații succesive:

— procedeul transmiterii rotirilor,

— procedeul distribuirii și transmiterii momentelor (Metoda Cross).

1. Procedeul transmiterii rotirilor

Se consideră sistemul de ecuații al metodei deplasărilor

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} Z_j + R_{ip} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{XIII.1}$$

și ecuația i (scrisă dezvoltat),

$$r_{i1} Z_1 + r_{i2} Z_2 + \ldots + r_{ii} Z_i + \ldots + r_{in} Z_n + R_{ip} = 0, \tag{XIII.2}$$

din care se determină necunoscuta principală Z_i

$$Z_i = -\frac{R_{ip}}{r_{ii}} - \frac{r_{i1}}{r_{ii}} Z_1 - \ldots - \frac{r_{in}}{r_{ii}} Z_n. \tag{XIII.3}$$

Notînd $Z_i^0 = -\dfrac{R_{ip}}{r_{ii}}$ și $t_{ij} = -\dfrac{r_{ij}}{r_{ii}}$, necunoscuta Z_i are expresia

$$Z_i = Z_i^0 + t_{i1} Z_1 + t_{i2} Z_2 + \ldots + t_{in} Z_n, \tag{XIII.4}$$

unde Z_i^0 se numește *rotire inițială* și reprezintă tendința de rotire din nodul i sub acțiunea forțelor exterioare în situația cu toate nodurile blocate, $Z_j = 0$, iar t_{ij} se numește *coeficient de transmitere* și reprezintă tendința de rotire ce se transmite la nodul i cînd nodul j se rotește cu $Z_j = 1$.

Sub acțiunea forțelor exterioare, în nodul i există tendința de rotire Z_i^0 care se transformă în rotire efectivă cînd nodul este deblocat. Deci rotirea în primă aproximație este $Z_i^{(1)} = Z_i^0$. În această poziție nodul i se reblochează. În nodurile vecine, j și k de exemplu, se transmit anumite tendințe de rotire și anume $t_{ji} Z_i^{(1)}$ în nodul j și $t_{ki} Z_i^{(1)}$ în nodul k.

În nodul j există acum o tendință de rotire $Z_j^0 + t_{ji} Z_i^{(1)}$ care se transformă în rotire efectivă a nodului j la prima sa deblocare

$$Z_j^{(1)} = Z_j^0 + t_{ji} Z_i^{(1)}. \tag{XIII.5}$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin rotirea tuturor nodurilor j şi k direct legate de nodul i, în nodul i se acumulează o nouă tendinţă de rotire şi anume

$$\Delta Z_i^{(2)} = \Sigma t_{ij} Z_j^{(1)} + \Sigma t_{ik} Z_k^{(1)}. \qquad \text{(XIII.6)}$$

Ciclul corectărilor rotirii iniţiale continuă pînă cînd în noduri rămîn tendinţe de rotire foarte mici, care practic pot fi neglijate.

Însumînd în fiecare nod valorile rotirii iniţiale şi ale corecţiilor succesive ale acesteia, se obţine rotirea finală.

Pentru o mai bună înţelegere a întregului proces iterativ, se va urmări schema din figura XIII.1.

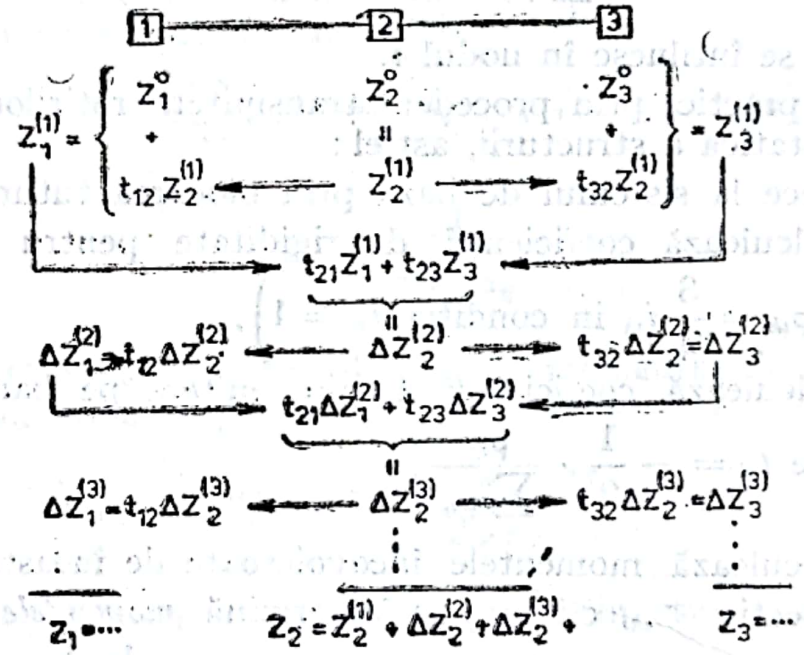


Fig. XIII.1

Trecerea de la rotiri la momente încovoietoare se face cu relaţiile (XII.10).

În scopul evitării operaţiilor necesare calculului reacţiunilor unitare r_{ii} şi r_{ij}, care apar în expresiile rotirilor iniţiale şi ale coeficienţilor de transmitere, se introduce noţiunea de *coeficient de rigiditate*.

Pentru bara dublu încastrată $\rho_{ij} = \dfrac{i_{ij}}{i_0}$, iar pentru bara încastrată-articulată $\rho_{ik} = \dfrac{3}{4} \dfrac{i_{ik}}{i_0}$. În aceste condiţii, relaţiile (XII.10) devin:

$$M_{ij} = \mathfrak{M}_{ij} - 4\rho_{ij}0_i - 2\rho_{ij}0_j,$$
$$M_{ji} = \mathfrak{M}_{ji} - 2\rho_{ij}0_i - 4\rho_{ij}0_j, \qquad \text{(XIII.7)}$$
$$M_{ik} = \mathfrak{M}_{ik} - 4\rho_{ik}0_i.$$

Coeficientul de transmitere și rotirea inițială capătă forma:

$$t_{ij} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_{ij}}{\sum_i \rho_{ij}}, \quad Z_i^0 = -\frac{R_{ip}}{r_{ii}} = \frac{\bar{M}_i}{4\sum_i \rho_{ij}}, \qquad \text{(XIII.8)}$$

unde $\bar{M}_i$ reprezintă momentul neechilibrat din nodul i, care produce rotirea acestui nod, iar $\sum_i \rho_{ij}$ este suma coeficienților de rigiditate ai barelor care se întîlnesc în nodul i.

Calculul practic, prin procedeul transmiterii rotirilor, se conduce pe schema statică a structurii, astfel:

— se trece la sistemul de bază prin blocarea tuturor nodurilor,

— se calculează coeficienții de rigiditate pentru fiecare bară $\left(\rho_{ij} = i_{ij} \text{ și } \rho_{ik} = \frac{3}{4} i_{ik} \text{ în condiția } i_0 = 1\right)$,

— se calculează coeficienții de transmitere pe barele ce unesc noduri rigide $t_{ij} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_{ij}}{\sum_i \rho_{ij}}$,

— se calculează momentele încovoietoare de încastrare perfectă $\mathfrak{M}_{ij}$, $\mathfrak{M}_{ji}$ respectiv $\mathfrak{M}_{ik}$, cu care se determină *momentele neechilibrate* $\bar{M}_i = \sum_i \mathfrak{M}_{ij} + \sum_i \mathfrak{M}_{ik}$ și rotirile inițiale $Z_i^0 = \frac{\bar{M}_i}{4\sum_i \rho_{ij}}$.

Toate aceste elemente au fost necesare pentru alcătuirea schemei de calcul. Operația de iterare se începe cu nodul cel mai solicitat, în care există tendința de rotire cea mai mare. Se eliberează pe rînd fiecare nod, se evaluează tendința de rotire ce se transmite la nodurile legate direct și se reblochează nodul. După atingerea convergenței dorite se stabilesc rotirile reale, cu care se determină momentele încovoietoare de la capetele barelor.

Verificarea corectitudinii calculelor se face utilizînd condiția de echilibru static (al părților sau al structurii întregi).

Scanned with OKEN Scanner

2. Procedeul distribuirii și transmiterii momentelor

Procedeul distribuirii și transmiterii momentelor, denumit curent procedeul Cross, operează în procesul iterativ cu momentele încovoietoare și nu cu deplasări.

Pe sistemul de bază, cu nodurile rigide blocate, în unele noduri sau în toate, funcție de ipoteza de încărcare, există *momente neechilibrate* ($\overline{M}_i$) capabile să producă rotirea nodurilor, în cazul deblocării acestora. Prin deblocarea unui nod, de exemplu nodul i al structurii din figura XIII.2, secțiunile capetelor barelor ce se întîlnesc în nod se rotesc cu același unghi, iar momentele încovoietoare care apar în aceste secțiuni sînt proporționale cu rigiditățile barelor la rotire de nod. Aceste momente au sens invers momentului neechilibrat ($\overline{M}_i$), care a determinat rotirea nodului, iar suma lor este egală cu $\overline{M}_i$ (din condiția de echilibru a nodului).

$$\overline{M}_i = 4Z_i \sum_i \rho_{ij} = 4Z_i(\rho_{ij} + \rho_{in} + \rho_{im} + \rho_{ik}). \qquad \text{(XIII.9)}$$

de unde

$$Z_i = \frac{\overline{M}_i}{4\sum_i \rho_{ij}}. \qquad \text{(XIII.10)}$$

Cu această valoare a rotirii, pentru momentul încovoietor M_{ij}, rezultă următoarea expresie

$$M_{ij} = -4\rho_{ij}Z_i = -\frac{\rho_{ij}}{\sum_i \rho_{ij}}\overline{M}_i = \mu_{ij}\overline{M}_i, \qquad \text{(XIII.11)}$$

unde $\mu_{ij} = -\frac{\rho_{ij}}{\sum \rho_{ij}}$ reprezintă cota parte din momentul neechilibrat $\overline{M}_i$ care revine barei ij și se numește *coeficient de distribuție*.

Calculînd coeficienții de distribuție pentru fiecare bară din nodul i, rezultă proprietatea

$$\sum_i \mu_{ij} = \mu_{ij} + \mu_{in} + \mu_{im} + \mu_{ik} = -1. \qquad \text{(XIII.12)}$$

Prin rotirea nodului i, la capătul opus al barei dublu încastrate, cu secțiune constantă, în sistemul de bază se transmite momentul încovoietor

$$M_{ji} = \frac{1}{2}M_{ij}, \qquad \text{(XIII.13)}$$

coeficientul de transmitere fiind egal deci cu 0,5.

Scanned with OKEN Scanner

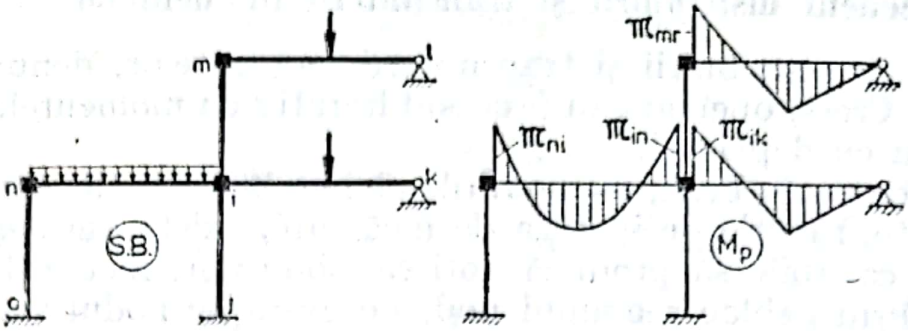


Fig. XIII.2

Din cele expuse rezultă că în acest procedeu se efectuează echilibrări succesive ale nodurilor, pînă cînd momentele neechilibrate ce se acumulează în noduri sînt suficient de mici pentru a considera că nodurile sînt în echilibru şi blocajele de nod pot fi eliminate. La fiecare echilibrare de nod se efectuează două operaţii — distribuirea momentului neechilibrat şi transmiterea valorilor obţinute, la capetele opuse.

Calculul practic se conduce astfel:

— se calculează coeficienţii de rigiditate ρ_{ij}, ρ_{ik} etc., pentru fiecare bară,

— se calculează coeficienţii de distribuţie,

— se calculează momentele încovoietoare de încastrare perfectă,

— se efectuează operaţia de echilibrare succesivă a nodurilor, (pentru fiecare nod ultima operaţie este de distribuire),

— se însumează valorile obţinute la fiecare capăt de bară şi se obţin momentele încovoietoare finale.

Deoarece la fiecare ciclu de calcul condiţia de echilibru static este satisfăcută, rezultă că verificarea eficientă este satisfacerea condiţiei de continuitate a deformatei. Practic, se verifică dacă secţiunile din acelaşi nod ale tuturor barelor au aceeaşi rotire în poziţia deformată finală.

Cunoscînd momentele încovoietoare finale şi cele de încastrare perfectă, din relaţiile (XII. 10) rezultă:

— pentru bara dublu încastrată

$$\theta_i = \frac{M_{ji}^* - 2M_{ij}^*}{6\rho_{ij}}, \qquad \text{(XIII.14)}$$

— pentru bara încastrată — articulată

$$\theta_i = -\frac{M_{ik}^*}{4\,\rho_{ik}}, \qquad \text{(XIII.15)}$$

unde $M_{ij}^* = M_{ij} - \mathfrak{M}_{ij}$, $M_{ji}^* = M_{ji} - \mathfrak{M}_{ji}$, $M_{ik}^* = M_{ik} - \mathfrak{M}_{ik}$.

Scanned with OKEN Scanner

Observații. În cazul structurilor simetrice calculul se conduce pe semistructură ținînd seama că:

— dacă axa de simetrie intersectează o bară, atunci pentru încărcări simetrice se ia coeficientul de rigiditate $\rho_{is} = 0{,}5\rho_{ii}$, iar pentru încărcări antisimetrice se ia coeficientul de rigiditate $\rho_{is} = 1{,}5\rho_{ii}$, conform relațiilor (XII.12),

— dacă axa de simetrie are direcția axei unui stîlp, se ia $\rho'_{ii} = 0{,}5\rho_{ii}$.

În cazul barelor cu secțiune transversală variabilă, se calculează coeficienții de rigiditate la rotire de nod pentru fiecare capăt de bară și se calculează, de asemenea, coeficienții de transmitere care sînt diferiți de 0,5.

Pentru bare avînd vute drepte, momentele încovoietoare de încastrare perfectă, coeficienții de rigiditate și coeficienții de transmitere, se determină din anexa 4.

STRUCTURI CU NODURI DEPLASABILE

Procedeul operării în două etape

Structurile cu noduri deplasabile pot fi rezolvate, prin aproximații succesive, utilizînd procedee de calcul într-o singură etapă sau în două etape. În cele ce urmează se prezintă numai procedeul de operare în două etape, ca fiind avantajos în rezolvarea structurilor cu număr mic de grade de libertate. Pentru structuri cu mai multe grade de libertate se preferă rezolvarea la calculatorul electronic.

Procedeul operării în două etape are la bază avantajele utilizării iterației pentru rezolvarea structurilor cu noduri fixe.

În acest sens, operația de iterare se conduce pe structura cu noduri fixe obținută prin blocarea deplasărilor pe direcțiile gradelor de libertate.

Rezultă că structura cu noduri fixe, astfel obținută, va trebui încărcată cu forțele exterioare și cu deplasările elastice Z_i pe direcțiile gradelor de libertate. Deoarece valorile deplasărilor elastice pe direcțiile gradelor de libertate nu sînt cunoscute inițial, se efectuează calculul pentru deplasări-unitate, $Z_i = 1$, iar valorile reale se vor obține din condiția trecerii de la structura cu noduri fixe la structura cu noduri deplasabile. Aceste aspecte se tratează în două etape, așa cum se prezintă în continuare.

Etapa 1ª

Se transformă structura cu noduri deplasabile în structură cu noduri fixe, prin blocarea gradelor de libertate.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru structura cu noduri fixe se trece la sistemul de bază, blocînd și nodurile rigide.

Sistemul de bază se încarcă pe rînd cu:

— forțele exterioare și prin unul dintre procedeele tratate la structuri cu noduri fixe, se echilibrează momentele încovoietoare din diagrama M_p și se obține o diagramă notată cu M_p^f. Indicele f arată faptul că diagrama este pe structura cu noduri fixe (cu gradele de libertate blocate),

— deplasarea elastică $Z_i = 1$ pe direcția gradului de libertate i, din care se obține diagrama m_i. Și aceste momente încovoietoare se echilibrează ca în cazul încărcării cu forțe și se obține diagrama m_i^f, indicele f avînd aceeași semnificație ca mai înainte.

Etapa a 2ª

În această etapă se face trecerea de la structura cu noduri fixe la structura cu noduri deplasabile, punînd condiția ca legăturile pe direcțiile gradelor de libertate să nu existe, respectiv condiția de echilibru a structurii reale pe direcțiile acestor legături.

Exprimînd condiția de echilibru static cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual se obține:

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \ldots L_l = 0,$$

unde l reprezintă numărul gradelor de libertate.

Forma dezvoltată a acestor condiții se scrie:

$$\begin{aligned} &L_{11}Z_1 + L_{12}Z_2 + \ldots + L_{1l}Z_l + L_{1p} = 0, \\ &L_{21}Z_1 + L_{22}Z_2 + \ldots + L_{2l}Z_l + L_{2p} = 0, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &L_{l1}Z_1 + L_{l2}Z_2 + \ldots + L_{ll}Z_l + L_{lp} = 0, \end{aligned} \qquad \text{(XIII.16)}$$

care este sistemul ecuațiilor de condiție, din rezolvarea căruia se obțin deplasările Z_i.

Semnificația coeficienților necunoscutelor și a termenilor liberi este următoarea:

L_{ij} — reprezintă lucrul mecanic virtual produs prin deplasarea cinematică $Z_i = 1$, de momentele încovoietoare din diagrama m_j^f, ca efect al deplasării elastice $Z_j = 1$.

L_{ip} — reprezintă lucrul mecanic virtual produs prin deplasarea cinematică $Z_i = 1$, de forțele exterioare și de momentele încovoietoare din diagrama M_p^f.

Scanned with OKEN Scanner

Cu deplasările Z_i astfel calculate se obțin momentele încovoietoare reale, prin suprapunerea efectelor,

$$M = M_p^f + m_1^f Z_1 + m_2^f Z_2 + \ldots + m_l^f Z_l. \qquad \text{(XIII.18)}$$

Observații. Procedeul de operare în două etape este avantajos pentru structuri cu 1—3 grade de libertate. Dacă numărul gradelor de libertate este mai mare, volumul de calcule este foarte mare.

Dacă sînt mai multe ipoteze de încărcare, atunci pentru fiecare ipoteză, începînd cu a doua, se parcurg numai următoarele secvențe: se calculează diagrama M_p^f și termenii liberi și se rezolvă sistemul de ecuații. Coeficienții necunoscutelor sînt aceiași.

În cazul forțelor concentrate aplicate în noduri, rezultă $M_p = 0$ și deci $M_p^f = 0$. Termenul liber este dat numai de forțele concentrate.

Se constată că $L_{ij} = -r_{ij}$.

APLICAȚII

Problema 13.1. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 13.1, utilizînd procedeul transmiterii rotirilor.

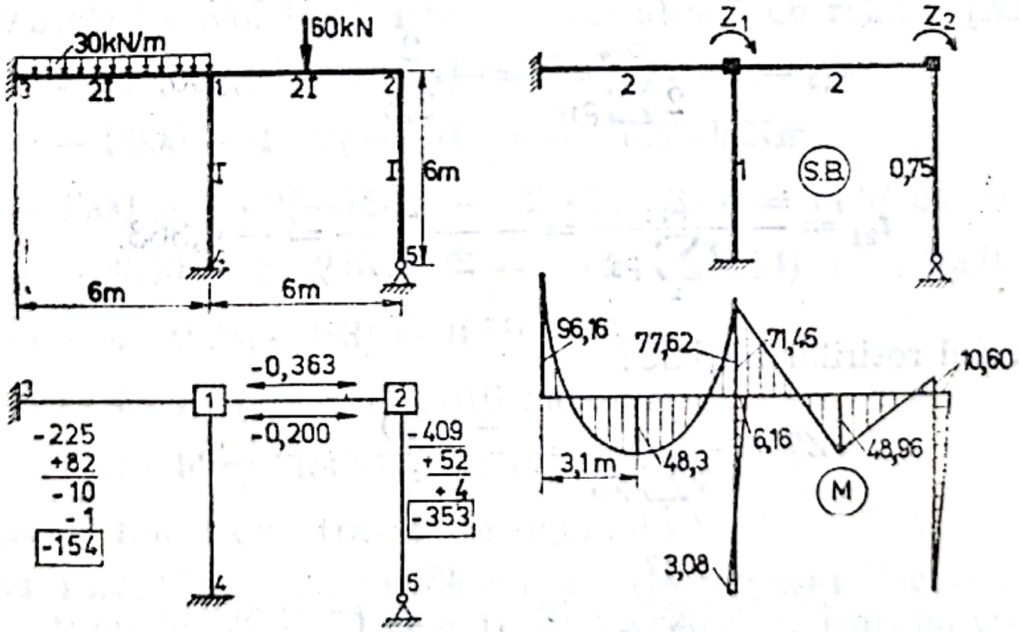


Fig. 13.1

Calculul coeficienților de rigiditate $\left(\text{se alege } i_0 = \frac{I}{6} = 1\right)$:

$$\rho_{12} = \frac{2I}{6} = 2, \quad \rho_{13} = \frac{2I}{6} = 2, \quad \rho_{14} = \frac{I}{6} = 1,$$

$$\rho_{25} = \frac{3}{4} \cdot \frac{I}{6} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Calculul momentelor încovoietoare de încastrare perfectă:

$$\mathfrak{M}_{12} = -\mathfrak{M}_{21} = \frac{Pl}{8} = \frac{60 \cdot 6}{8} = 45 \text{ kNm} = 4500 \text{ daNm},$$

$$\mathfrak{M}_{31} = -\mathfrak{M}_{13} = \frac{pl^2}{12} = \frac{30 \cdot 6^2}{12} = 90 \text{ kNm} = 9000 \text{ daNm}.$$

Suma coeficienților de rigiditate ai barelor ce se întîlnesc în nodurile rigide:

$$\sum_1 \rho_{1i} = \rho_{12} + \rho_{13} + \rho_{14} = 5,$$

$$\sum_2 \rho_{2i} = \rho_{21} + \rho_{25} = 2{,}75.$$

Coeficienții de trasmitere între cele două noduri:

$$t_{12} = -\frac{\rho_{12}}{2\sum_1 \rho_{1i}} = -\frac{2}{2{,}5} = -0{,}200,$$

$$t_{21} = -\frac{\rho_{21}}{2\sum_2 \rho_{2i}} = -\frac{2}{2 \cdot 2{,}75} = -0{,}363.$$

Calculul rotirilor inițiale:

$$Z_1^0 = \frac{\bar{M}_1}{4\sum_1 \rho_{1i}} = \frac{-4500}{4 \cdot 5} = -225,$$

$$Z_2^0 = \frac{\bar{M}_2}{4\sum_2 \rho_{2i}} = \frac{-4500}{4 \cdot 2{,}75} = -409,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde:

$$\bar{M}_1 = \mathfrak{M}_{13} + \mathfrak{M}_{12} = -9000 + 4500 = -4500 \text{ daNm},$$

$$\bar{M}_2 = \mathfrak{M}_{21} = -4500 \text{ daNm}.$$

Cu rotirile inițiale și coeficienții de transmitere se alcătuiește schema de calcul. Operația de iterare se începe cu nodul 2 ca fiind mai dezechilibrat. Deblocînd nodul 2, el se rotește cu —409 și rămîne în echilibru. În această poziție nodul se reblochează, lucrul acesta marcîndu-se prin bararea valorii 409 cu o linie.

La nodul 1, în afara tendinței inițiale de rotire (—225), apare efectul transmis de rotirea nodului 2. Acest efect este $(-409) \cdot (-0{,}200) = 82$.

Tendința totală de rotire a nodului 1 este: $-225 + 82 = -143$.

Deblocînd nodul 1, acesta se va roti cu cantitatea — 143, după care se va opri în echilibru. În această poziție se reblochează nodul 1, iar în schema de calcul aceasta se marchează prin bararea termenilor ce au format tendința de rotire a nodului.

În nodul 2, a apărut o tendință de rotire egală cu $(-143) \cdot (-0{,}363) = 52$.

Ciclul se reia pînă cînd valorile obținute sînt înscrise într-o eroare admisă.

Se efectuează sumele pe fiecare coloană și rezultatul obținut reprezintă rotirea totală a fiecărui nod.

În acest caz rezultă: $Z_1 = -154$ și $Z_2 = -353$.

Momentele încovoietoare finale se calculează cu relația (XII.10):

$$M_{31} = 9000 - 2 \cdot 2 \cdot (-154) = 9616 \text{ daNm},$$

$$M_{13} = -9000 - 4 \cdot 2(-154) = -7762 \text{ daNm},$$

$$M_{12} = 4500 - 4 \cdot 2(-154) - 2 \cdot 2(-353) = 7146 \text{ daNm},$$

$$M_{21} = -4500 - 4 \cdot 2(-353) - 2 \cdot 2 \cdot (-154) = -1060 \text{ daNm},$$

$$M_{25} = -4 \cdot 0{,}75(-353) = 1059 \text{ daNm},$$

$$M_{14} = -4 \cdot 1 \cdot (-154) = 616 \text{ daNm},$$

$$M_{41} = -2 \cdot 1 \cdot (-156) = 308 \text{ daNm}.$$

Diagrama finală este trasată în figura 13.1.

Problema 13.2. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 13.2, utilizînd procedeul transmiterii rotirilor.

Inv. 75658

Scanned with OKEN Scanner

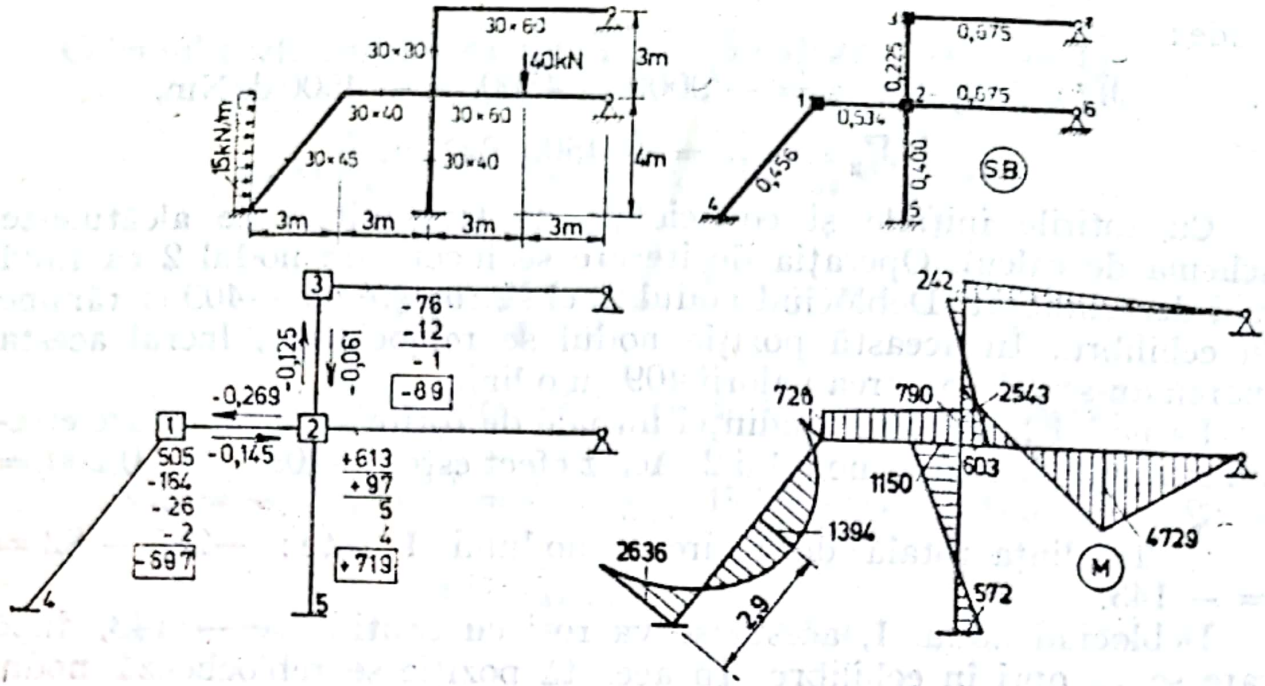


Fig. 13.2.

Momentele de inerţie:

$$I_{12} = I_{25} = \frac{3 \cdot 4^3}{12} = 16 \text{ dm}^4,$$

$$I_{23} = \frac{3^4}{12} = 6{,}75 \text{ dm}^4,$$

$$I_{26} = I_{27} = \frac{3 \cdot 6^3}{12} = 54 \text{ dm}^4,$$

$$I_{14} = \frac{3 \cdot 4{,}5^3}{12} = 22{,}8 \text{ dm}^4.$$

Coeficienţii de rigiditate ai barelor:

$$\rho_{12} = \frac{16}{30} = 0{,}534, \qquad \rho_{26} = \frac{3}{4} \cdot \frac{54}{60} = 0{,}675;$$

$$\rho_{14} = \frac{22{,}8}{50} = 0{,}456, \qquad \rho_{37} = \frac{3}{4} \cdot \frac{54}{60} = 0{,}675,$$

$$\rho_{23} = \frac{6{,}75}{30} = 0{,}225, \qquad \rho_{25} = \frac{16}{40} = 0{,}400.$$

Scanned with OKEN Scanner

Suma coeficienţilor de rigiditate ai barelor ce formează nodurile rigide:

$$\sum_1 \rho_{1i} = 0{,}456 + 0{,}534 = 0{,}990,$$

$$\sum_2 \rho_{2i} = 0{,}534 + 0{,}400 + 0{,}675 + 0{,}225 = 1{,}834,$$

$$\sum_3 \rho_{3i} = 0{,}225 + 0{,}675 = 0{,}900.$$

Calculul coeficienţilor de transmitere:

$$t_{12} = -\frac{\rho_{12}}{2\sum_1 \rho_{1i}} = -\frac{0{,}534}{2 \cdot 0{,}99} = -0{,}269,$$

$$t_{21} = -\frac{\rho_{12}}{2\sum_2 \rho_{2i}} = -\frac{0{,}534}{2 \cdot 1{,}834} = -0{,}145,$$

$$t_{23} = -\frac{\rho_{23}}{2\sum_2 \rho_{2i}} = -\frac{0{,}225}{2 \cdot 1{,}834} = -0{,}061,$$

$$t_{32} = -\frac{\rho_{23}}{2\sum_3 \rho_{3i}} = -\frac{0{,}225}{2 \cdot 0{,}9} = -0{,}125.$$

Momentele de încastrare perfectă:

$$\mathfrak{M}_{41} = -\mathfrak{M}_{14} = \frac{15 \cdot 4^3}{12} = 20 \text{ kNm} = 2000 \text{ daNm},$$

$$\mathfrak{M}_{26} = \frac{3 \cdot 40 \cdot 6}{16} = 45 \text{ kNm} = 4500 \text{ daNm}.$$

Valorile rotirilor iniţiale:

$$Z_1^0 = \frac{\overline{M}_1}{4\Sigma\rho_1} = \frac{-2000}{4 \cdot 0{,}99} = -505,$$

$$Z_2^0 = \frac{\overline{M}_2}{4\Sigma\rho_2} = \frac{4500}{4 \cdot 1{,}834} = 613,$$

$$Z_3^0 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Efectuînd operaţia de iterare se obţin următoarele rotiri totale ale nodurilor:

$$Z_1 = -697, \quad Z_2 = 719 \quad \text{şi} \quad Z_3 = -89.$$

Calculul momentelor încovoietoare finale:

$$M_{14} = -2000 - 4 \cdot 0{,}456 \cdot (-697) = -728{,}6 \text{ daNm},$$

$$M_{12} = -4 \cdot 0{,}534 \cdot (-697) - 2 \cdot 0{,}534 \cdot 719 = 728 \text{ daNm},$$

$$M_{41} = 2000 - 2 \cdot 0{,}456 \cdot (-697) = 2635{,}6 \text{ daNm},$$

$$M_{21} = -4 \cdot 0{,}534 \cdot 719 - 2 \cdot 0{,}534 \cdot (-697) = -791{,}3 \text{ daNm},$$

$$M_{25} = -4 \cdot 0{,}400 \cdot 719 = -1150{,}4 \text{ daNm},$$

$$M_{26} = 4500 - 4 \cdot 0{,}675 \cdot 719 = 2558 \text{ daNm},$$

$$M_{23} = -4 \cdot 0{,}225 \cdot 719 - 2 \cdot 0{,}225 \cdot (-89) = 603 \text{ daNm},$$

$$M_{32} = -4 \cdot 0{,}225 \cdot (-89) - 2 \cdot 0{,}225 \cdot 719 = 243{,}4 \text{ daNm},$$

$$M_{31} = -4 \cdot 0{,}675 \cdot (-89) = 240{,}3 \text{ daNm},$$

$$M_{52} = -2 \cdot 0{,}400 \cdot 719 = -575{,}2 \text{ daNm}.$$

Diferenţele ce apar între valorile momentelor încovoietoare pe barele ce formează nodurile, se datoresc faptului că procesul iterativ s-a oprit la valori de ordinul unităţilor pentru rotirile nodurilor. Se introduce astfel o mică eroare în valorile finale ale momentelor încovoietoare, nesemnificativă pentru calculul practic.

Problema 13.3. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura de la problema 13.1, utilizînd metoda Cross.

Coeficienţii de rigiditate, pentru $\frac{I}{6} = 1$, sînt înscrişi direct pe sistemul de bază.

Coeficienţii de rigiditate ai nodurilor rigide:

$$\sum_1 \rho_{1i} = 2 + 2 + 1 = 5,$$

$$\sum_2 \rho_{2i} = 2 + 0{,}75 = 2{,}75.$$

Scanned with OKEN Scanner

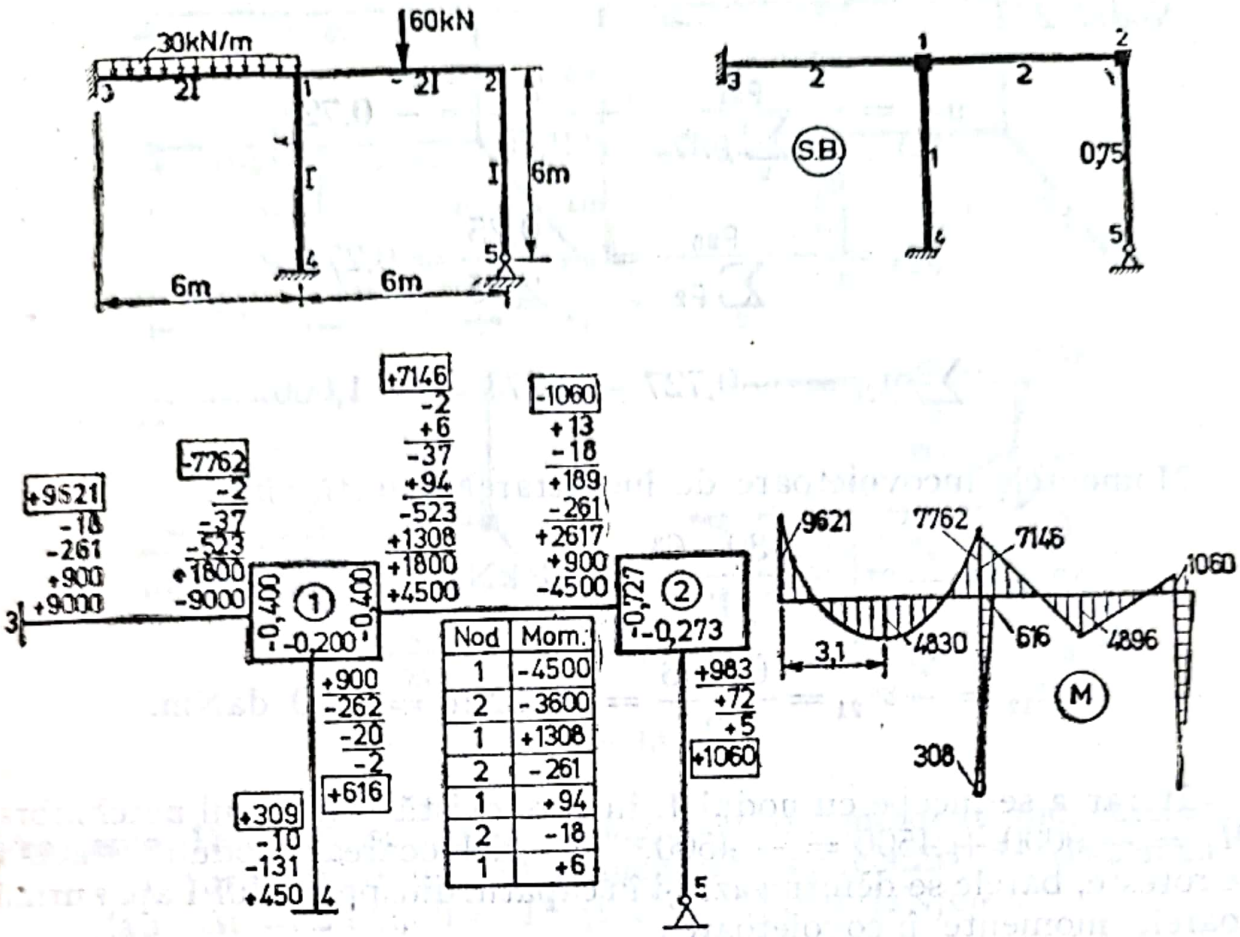


Fig. 13.3

Coeficienţii de distribuţie sînt:

Nodul 1

$$\mu_{13} = -\frac{\rho_{13}}{\sum_1 \rho_{1i}} = -\frac{2}{5} = 0{,}400,$$

$$\mu_{14} = -\frac{\rho_{14}}{\sum_1 \rho_{1i}} = -\frac{1}{5} = -\,0{,}200,$$

$$\mu_{12} = -\frac{\rho_{12}}{\sum_1 \rho_{1i}} = -\frac{2}{5} = -\,0{,}400,$$

$$\sum_1 \mu_{1i} = -\,0{,}400 - 0{,}200 - 0{,}400 = -\,1{,}000.$$

Scanned with OKEN Scanner

Nodul 2

$$\mu_{21} = -\frac{\rho_{21}}{\sum_2 \rho_{2i}} = -\frac{2}{2{,}75} = -0{,}727,$$

$$\mu_{25} = -\frac{\rho_{25}}{\sum_2 \rho_{2i}} = -\frac{0{,}75}{2{,}75} = 0{,}273,$$

$$\sum_2 \mu_{2i} = -0{,}727 - 0{,}273 = -1{,}000.$$

Momentele încovoietoare de încastrare perfectă sînt:

$$\mathfrak{M}_{31} = -\mathfrak{M}_{13} = \frac{30 \cdot 6^2}{12} = 90 \text{ kNm} = 9000 \text{ daNm},$$

$$\mathfrak{M}_{12} = -\mathfrak{M}_{21} = \frac{60 \cdot 6}{8} = 45 \text{ kNm} = 4500 \text{ daNm}.$$

Iterarea se începe cu nodul 1, în care există momentul neechilibrat $\bar{M}_1 = -9000 + 4500 = -4500$. La deblocarea nodului, acesta se rotește, barele se deformează și în capătul dinspre nodul 1 apar următoarele momente încovoietoare:

— pe barele 1—2 și 1—3; $-4500 \cdot (-0{,}400) = 1800$,

— pe bara 1—4; $-4500 \cdot (-0{,}200) = 900$.

Aceste valori se trec pe schema de calcul și apoi se transmit cu același semn și înmulțite cu coeficientul 0,5, capetelor opuse ale barelor. Rezultă valorile: 900 la capătul 3 al barei 1—3, 900 la capătul 2 al barei 1—2 și 450 la capătul 4 al barei 1—4.

Nodul este în echilibru, aceasta marcîndu-se prin cîte o bară deasupra valorilor distibuite.

Nodul 2 este neechilibrat, valoarea momentului neechilibrat fiind $M_2 = -4500 + 900 = -3600$. Se distribuie această valoare, iar momentele încovoietoare obținute se transmit capetelor opuse ale barelor. Ordinea parcurgerii nodurilor și momentele neechilibrate, în fiecare ciclu iterativ, sînt indicate lîngă schema de calcul. Operația de iterare se încheie cu o distribuție, astfel ca fiecare nod să fie în echilibru.

Mărimile obținute prin însumarea valorilor din coloanele de la capetele barelor reprezintă momentele încovoietoare finale. Se constată că ele sînt practic egale cu cele obținute utilizînd procedeul transmiterii rotirilor.

Scanned with OKEN Scanner

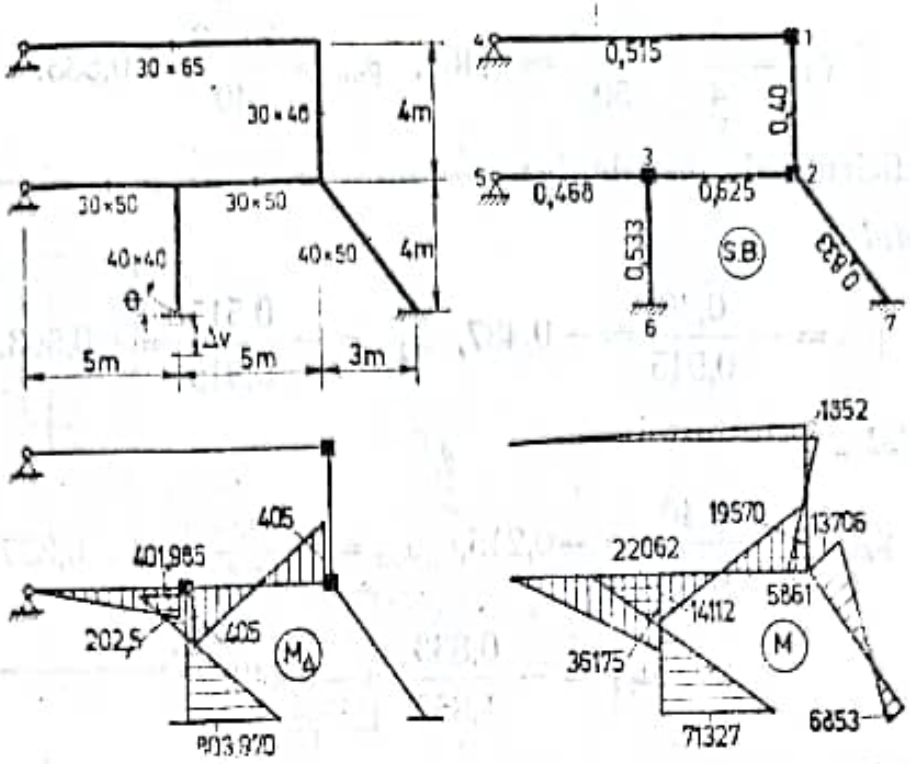


Fig. 13.4.

Problema 13.4. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 13.4, încărcată cu cedări de reazeme. Se dau: $\Delta v = 2$ cm, $\theta = 1°$ şi $E = 270000$ daN/cm².

Calculul momentelor de inerţie:

$$I_{12} = \frac{3 \cdot 4^3}{12} = 16 \text{ dm}^4, \quad I_{14} = \frac{3 \cdot 6{,}5^3}{12} = 68{,}656 \text{ dm}^4,$$

$$I_{23} = I_{35} = \frac{3 \cdot 5^3}{12} = 31{,}25 \text{ dm}^4, \quad I_{36} = \frac{4^4}{12} = 21{,}33 \text{ dm}^4,$$

$$I_{27} = \frac{4 \cdot 5^3}{12} = 41{,}66 \text{ dm}^4.$$

Calculul coeficienţilor de rigiditate:

$$\rho_{12} = \frac{16}{40} = 0{,}40, \quad \rho_{14} = \frac{3}{4} \cdot \frac{68{,}656}{100} = 0{,}515,$$

$$\rho_{23} = \frac{31{,}25}{50} = 0{,}625; \quad \rho_{27} = \frac{41{,}66}{50} = 0{,}833,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\rho_{35} = \frac{3}{4} \cdot \frac{31,25}{50} = 0,468, \quad \rho_{36} = \frac{21,33}{40} = 0,533.$$

Coeficienţii de distribuţie:

Nodul 1

$$\mu_{12} = -\frac{0,40}{0,915} = -0,437, \quad \mu_{14} = -\frac{0,515}{0,915} = -0,563.$$

Nodul 2

$$\mu_{21} = -\frac{0,40}{1,858} = -0,215, \quad \mu_{23} = -\frac{0,625}{1,858} = -0,337,$$

$$\mu_{27} = -\frac{0,833}{1,858} = -0,448.$$

Nodul 3

$$\mu_{32} = -\frac{0,625}{1,626} = -0,384, \quad \mu_{35} = -\frac{0,468}{1,626} = -0,288,$$

$$\mu_{36} = -\frac{0,533}{1,626} = -0,328.$$

Calculul momentelor încovoietoare de încastrare perfectă:
— din acţiunea încărcării cu deplasarea Δv,

$$\mathfrak{M}_{35} = \frac{3EI}{l^2}\Delta v = \frac{3 \cdot 27000000 \cdot 31,25 \cdot 10^{-4}}{5^2} \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 202,5 \text{ kNm},$$

$$\mathfrak{M}_{32} = \mathfrak{M}_{23} = \frac{6EI}{l^2}\Delta v = \frac{6 \cdot 27000000 \cdot 31,25 \cdot 10^{-4}}{5^2}(-2 \cdot 10^{-2}) =$$

$$= -405 \text{ kNm},$$

— din acţiunea încărcării cu rotirea θ,

$$\mathfrak{M}_{63} = -\frac{4EI}{l}\theta = -\frac{27000000 \cdot 21,33 \cdot 10^{-4}}{5} \cdot 0,01745 = -803,97 \text{ kNm},$$

$$\mathfrak{M}_{36} = \frac{1}{2}\mathfrak{M}_{63} = -401,98 \text{ kNm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

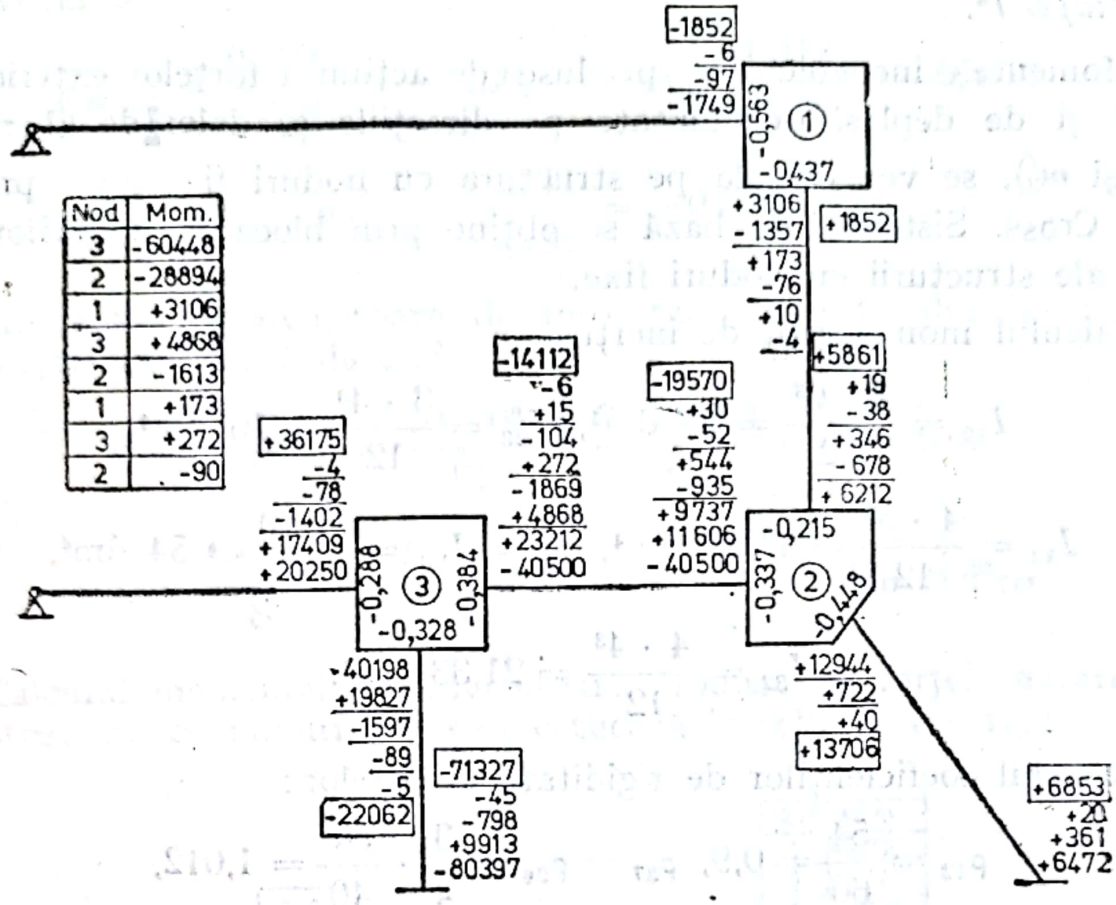


Fig. 13.5

Aceste momente încovoietoare au fost reprezentate în diagrama *M* (fig. 13.4) și echilibrate în schema de iterare din figura 13.5.

Problema 13.5. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura cu noduri deplasabile din figura 13.6, utilizînd operarea în două etape.

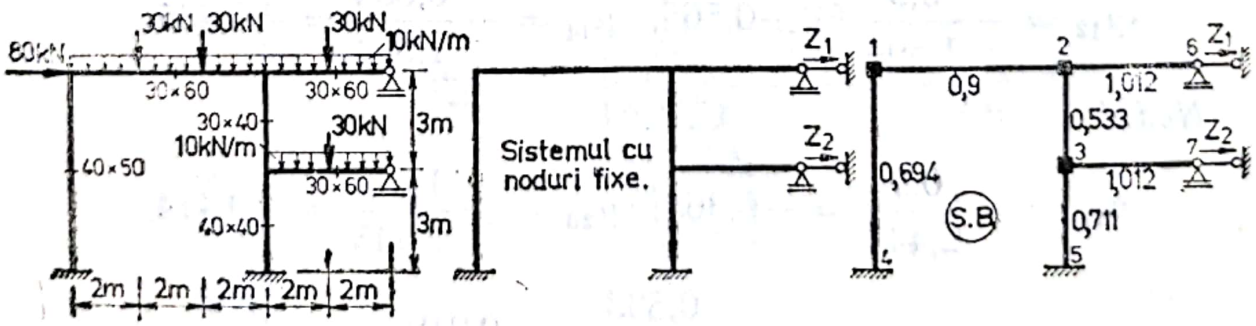


Fig. 13.6.

Scanned with OKEN Scanner

Etapa 1ª.

Momentele încovoietoare produse de acţiunea forţelor exterioare (M_p^f) şi de deplasările—unitate pe direcţiile gradelor de libertate (m_1^f şi m_2^f), se vor calcula pe structura cu noduri fixe prin procedeul Cross. Sistemul de bază se obţine prin blocarea nodurilor rigide ale structurii cu noduri fixe.

Calculul momentelor de inerţie:

$$I_{12} = \frac{3 \cdot 6^3}{12} = 54 \text{ dm}^4, \quad I_{23} = \frac{3 \cdot 4^3}{12} = 16 \text{ dm}^4,$$

$$I_{14} = \frac{4 \cdot 5^3}{12} = 41{,}67 \text{ dm}^4, \quad I_{37} = I_{26} = \frac{3 \cdot 6^3}{12} = 54 \text{ dm}^4,$$

$$I_{32} = \frac{4 \cdot 4^3}{12} = 21{,}33 \text{ dm}^4.$$

Calculul coeficienţilor de rigiditate ai barelor:

$$\rho_{12} = \frac{54}{60} = 0{,}9, \quad \rho_{37} = \rho_{26} = \frac{3}{4} \cdot \frac{54}{40} = 1{,}012,$$

$$\rho_{14} = \frac{41{,}67}{60} = 0{,}694, \quad \rho_{35} = \frac{21{,}33}{30} = 0{,}74,$$

$$\rho_{23} = \frac{16}{30} = 0{,}533.$$

Coeficienţii de distribuţie:

Nodul 1

$$\mu_{12} = -\frac{0{,}9}{1{,}594} = -0{,}565, \quad \mu_{14} = -\frac{0{,}694}{1{,}594} = -0{,}435.$$

Nodul 2

$$\mu_{21} = -\frac{0{,}9}{2{,}445} = -0{,}368, \quad \mu_{26} = -\frac{1{,}012}{2{,}445} = -0{,}414,$$

$$\mu_{23} = -\frac{0{,}533}{2{,}445} = -0{,}218.$$

Scanned with OKEN Scanner

Nodul 3

$$\mu_{32} = -\frac{0{,}533}{2{,}256} = -0{,}236, \quad \mu_{37} = -\frac{1{,}012}{2{,}256} = -0{,}449,$$

$$\mu_{35} = -\frac{0{,}711}{2{,}256} = -0{,}315.$$

Momentele încovoietoare de încastrare perfectă din încărcarea cu forțele exterioare date sînt:

$$\mathfrak{M}_{12} = -\mathfrak{M}_{21} = \frac{10 \cdot 6^2}{12} + \frac{30 \cdot 2 \cdot 4}{6} = 70 \text{ kNm},$$

$$\mathfrak{M}_{26} = \frac{10 \cdot 4^2}{8} + \frac{3 \cdot 30 \cdot 4}{16} = 42{,}5 \text{ kNm}, \quad \mathfrak{M}_{37} = \mathfrak{M}_{26}.$$

Calculul momentelor încovoietoare produse de forțele exterioare pe structura cu noduri fixe se efectuează în schema din figura 13.7.

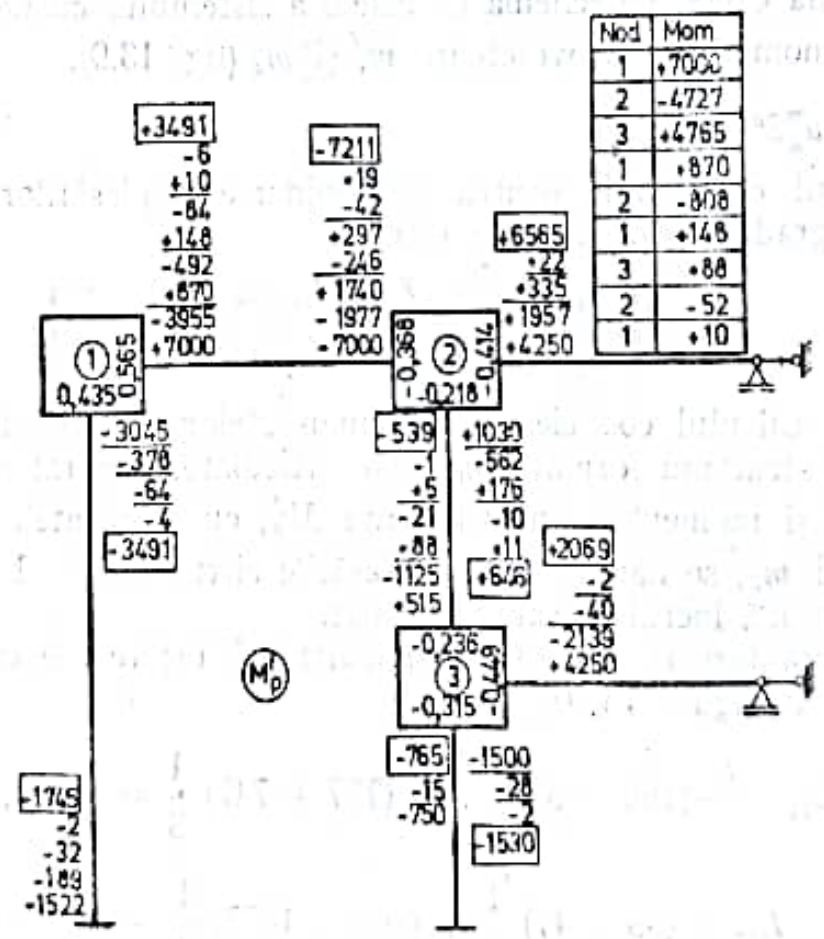


Fig. 13.7

Scanned with OKEN Scanner

Din deplasările elastice $Z_1 = 1$ și $Z_2 = 1$ rezultă pozițiile deplasate și momentele încovoietoare, pe sistemul de bază, reprezentate în figura 13.8.

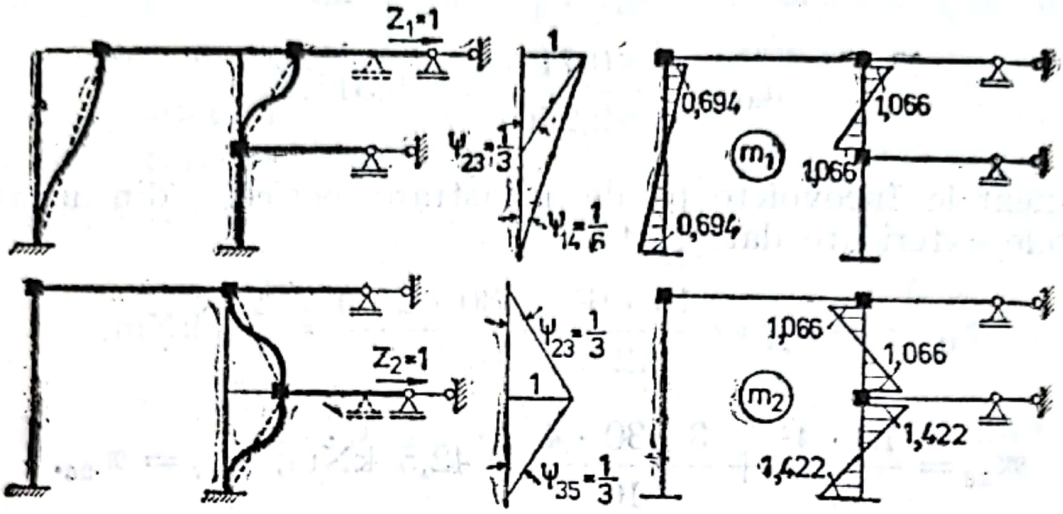


Fig. 13.8

Momentele încovoietoare din diagramele m_1 și m_2 se echilibrează prin metoda Cross, pe schema de calcul a sistemului cu noduri fixe, obținînd momentele încovoietoare m_1^f și m_2^f (fig. 13.9).

Etapa a 2-a

Sistemul de ecuații pentru determinarea deplasărilor reale pe direcțiile gradelor de libertate este:

$$\begin{cases} L_{11}Z_1 + L_{12}Z_2 + L_{1p} = 0 \\ L_{21}Z_1 + L_{22}Z_2 + L_{2p} = 0. \end{cases}$$

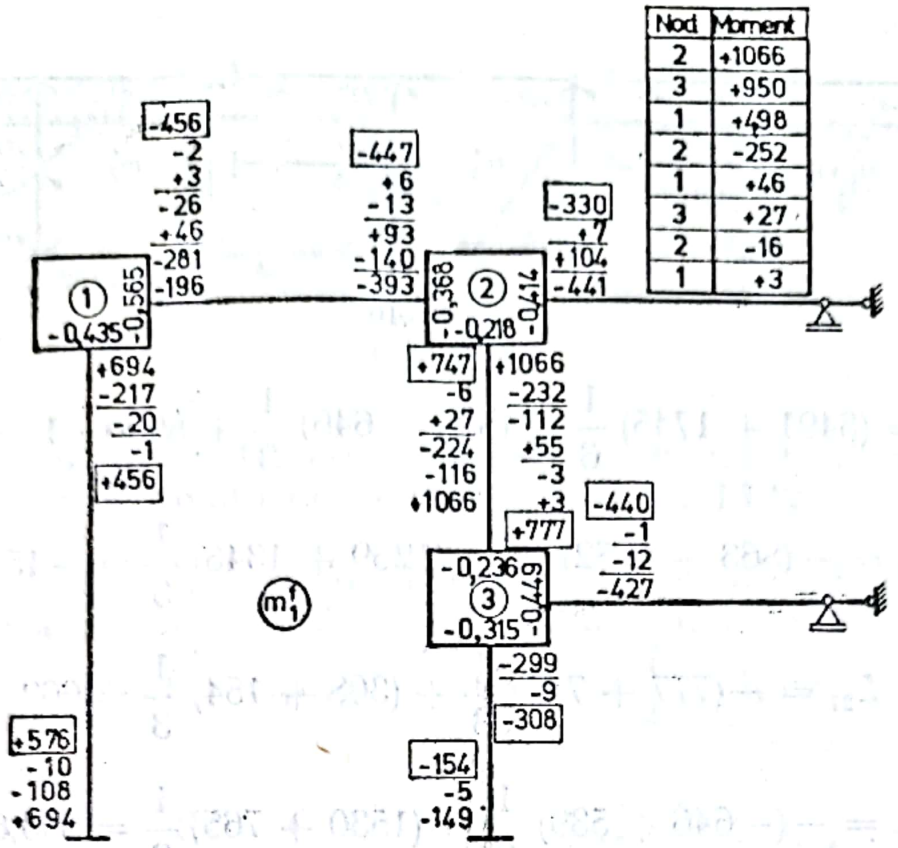
Pentru calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi se încarcă structura formată din bare articulate, separat cu forțele exterioare și momentele încovoietoare M_p^f, cu momentele încovoietoare m_1^f și m_2^f, se dau pe rînd deplasările virtuale $\bar{Z}_1 = 1$ și $\bar{Z}_2 = 1$ și se evaluează lucrul mecanic efectuat.

Structura formată din bare articulate și încărcările ei sînt reprezentate în figura 13.10.

$$L_{11} = -(456 + 576)\frac{1}{6} - (777 + 747)\frac{1}{3} = -680,$$

$$L_{12} = (95 + 47)\frac{1}{6} + (863 + 1057)\frac{1}{3} = 662,$$

Scanned with OKEN Scanner



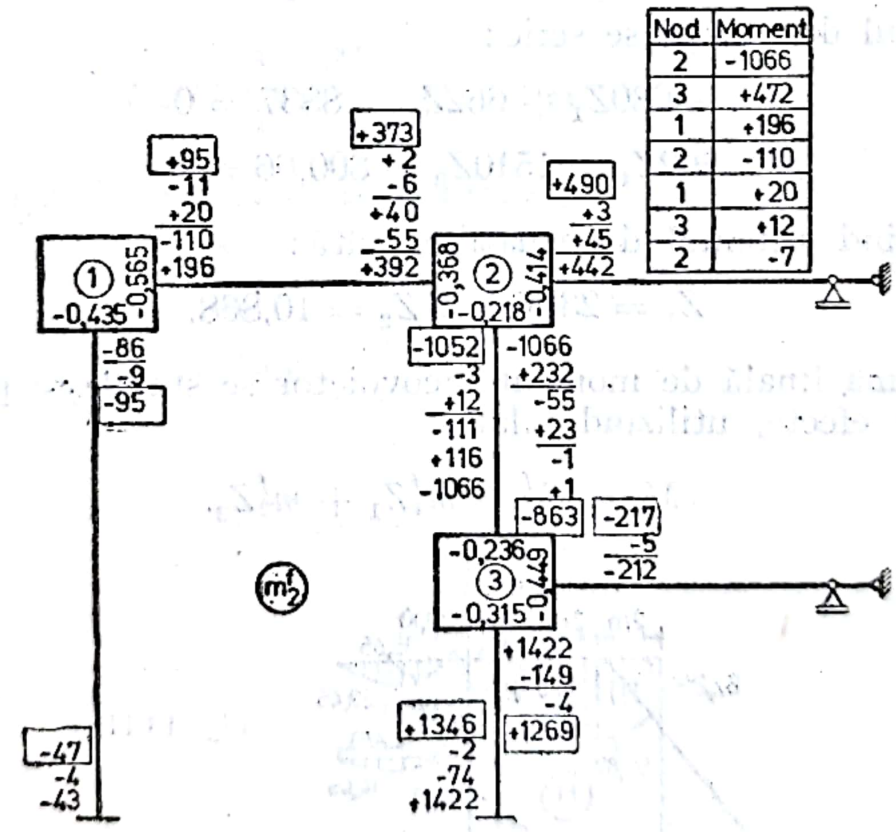


Fig. 13.9

Scanned with OKEN Scanner

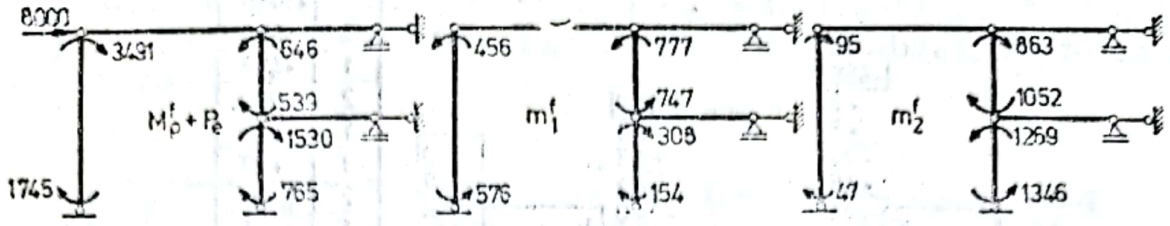


Fig. 13.10

$$L_{1p} = (3491 + 1745)\frac{1}{6} + (539 - 646)\frac{1}{3} + 8000 \cdot 1 = 8837,$$

$$L_{22} = -(863 + 1052)\frac{1}{3} - (1269 + 1346)\frac{1}{3} = -1510,$$

$$L_{21} = -(777 + 747)\frac{1}{3} + (308 + 154)\frac{1}{3} = 662,$$

$$L_{2p} = -(-646 + 539)\frac{1}{3} + (1530 + 765)\frac{1}{3} = 800{,}66.$$

Sistemul de ecuații se scrie:

$$-680Z_1 + 662Z_2 + 8837 = 0$$
$$662Z_1 - 1510Z_2 + 800{,}66 = 0$$

Rezolvînd sistemul de ecuații rezultă:

$$Z_1 = 23{,}575 \text{ și } Z_2 = 10{,}868.$$

Diagrama finală de moment încovoietor se stabilește prin suprapunere de efecte, utilizînd relația

$$M = M_p^f + m_1^f Z_1 + m_2^f Z_2.$$

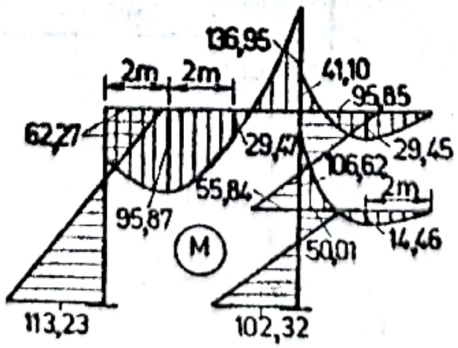


Fig. 13.11

Scanned with OKEN Scanner

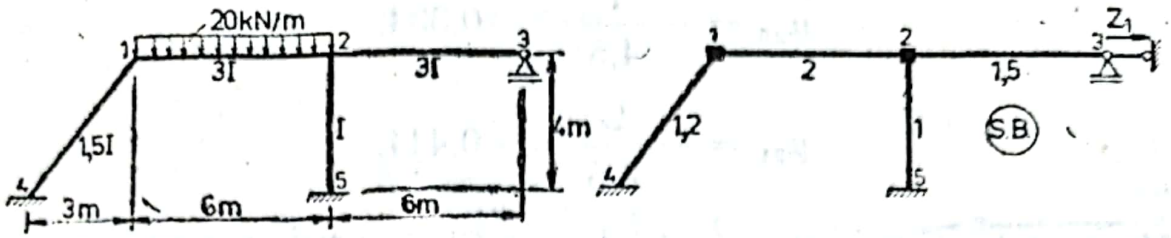


Fig. 13.12

Problema 13.6. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura cu noduri deplasabile din figura 13.12.

Structura are un grad de libertate. Sistemul de bază, obținut prin blocarea rotirii nodurilor pe structura cu noduri fixe, și coeficienții de rigiditate, obținuți pentru $i_0 = \frac{I}{4} = 1$, sînt prezentați în figură.

$$\rho_{12} = \frac{3I}{6} \cdot \frac{4}{4} = 2, \quad \rho_{14} = \frac{1{,}5I}{5} \cdot \frac{3}{4} = 1{,}2,$$

$$\rho_{23} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3I}{6} = 1{,}5, \quad \rho_{25} = \frac{I}{4} = 1.$$

Coeficienții de rigiditate ai nodurilor:

$$\sum_1 \rho_{1i} = 3{,}2, \quad \sum_2 \rho_{2i} = 4{,}5.$$

Coeficienții de distribuție:

Nodul 1

$$\mu_{12} = -\frac{2}{3{,}2} = -0{,}625,$$

$$\mu_{14} = -\frac{1{,}2}{3{,}2} = -0{,}375.$$

Nodul 2

$$\mu_{23} = -\frac{1{,}5}{4{,}5} = -0{,}222,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\mu_{25} = -\frac{1}{4,5} = -0,334,$$

$$\mu_{21} = -\frac{2}{4,5} = -0,444.$$

Momentele încovoietoare de încastrare perfectă din încărcarea cu forţe exterioare sînt :

$$\mathfrak{M}_{12} = -\mathfrak{M}_{21} = \frac{20 \cdot 6^2}{12} = 60 \text{ kNm}.$$

Calculul momentelor încovoietoare produse de forţele exterioare pe structura cu noduri fixe, se efectuează în schema din figura 13.13.

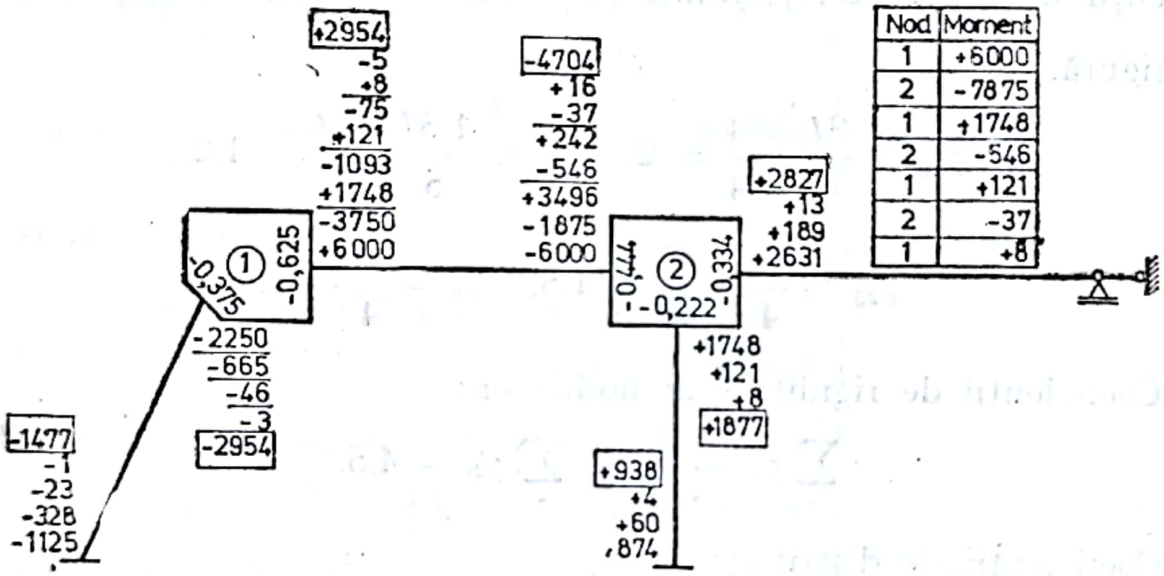


Fig. 13.13

Din încărcarea cu deplasarea $Z_1 = 1$ rezultă poziţia deplasată şi momentele încovoietoare (m_1) reprezentate în figura 13.14, b şi c.

Momentele încovoietoare din diagrama m_1 au fost echilibrate prin metoda Cross, obţinîndu-se diagrama m_1^f (fig. 13.14, d).

În figura 13.14, c şi f sînt reprezentate momentele încovoietoare m_1^f şi M_p^f pe sistemul format din bare articulate.

Ecuaţia de condiţie este

$$L_{11}Z_1 + L_{1p} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

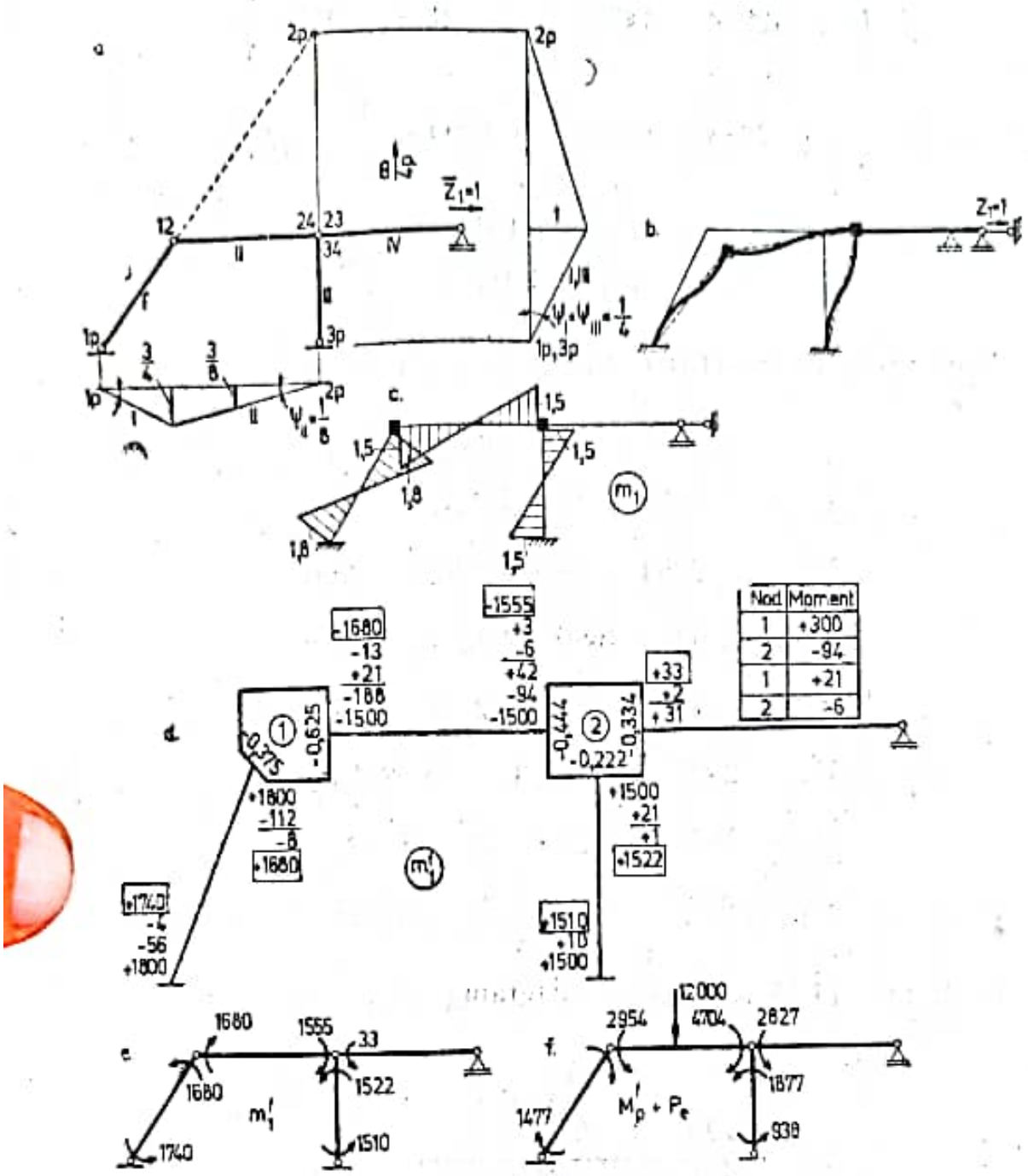


Fig. 13.14

și apoi

$$L_{11} = -(1740 + 1680)\frac{1}{4} - (1680 + 1555)\frac{1}{8} -$$

$$- (1522 + 1510)\frac{1}{4} = -2017{,}4,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$L_{1p} = (2954 + 1477)\frac{1}{4} + (-938 - 1877)\frac{1}{4} -$$

$$- (-2954 + 4704)\frac{1}{8} + 12000 \cdot \frac{3}{8} = 4684,$$

$$Z_1 = -\frac{L_{1p}}{L_{11}} = \frac{4684}{2017,4} = 2,32.$$

Momentele încovoietoare finale se obţin cu relaţia

$$M = M_p^f + m_1^f Z_1.$$

$$M_{41} = -1477 + 1740 \cdot 2,32 = 2559,8.$$

$$M_{14} = -2954 + 1680 \cdot 2,32 = 943,6,$$

$$M_{12} = 2954 - 1680 \cdot 2,32 = -943,6,$$

$$M_{21} = -4704 - 1555 \cdot 2,32 = -8311,6,$$

$$M_{23} = 2827 + 33 \cdot 2,32 = 2903,6,$$

$$M_{25} = 1877 + 1522 \cdot 2,32 = 5408,$$

$$M_{52} = 938 + 1510 \cdot 2,32 = 4441,2.$$

În figura 13.15 s-a trasat diagrama finală M.

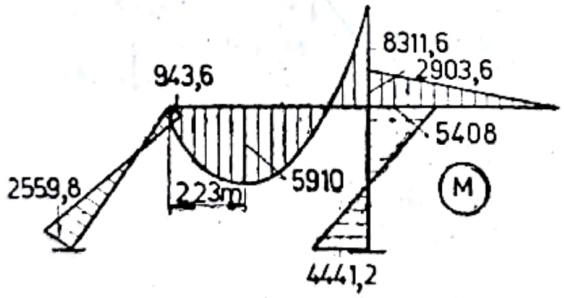


Fig. 13.15

Problema 13.7. Să se traseze diagrama de moment încovoietor pentru structura simetrică din figura 13.16.

Rezolvarea se face descompunînd încărcarea oarecare într-o componentă simetrică şi alta antisimetrică şi utilizînd semistructurile

Scanned with OKEN Scanner

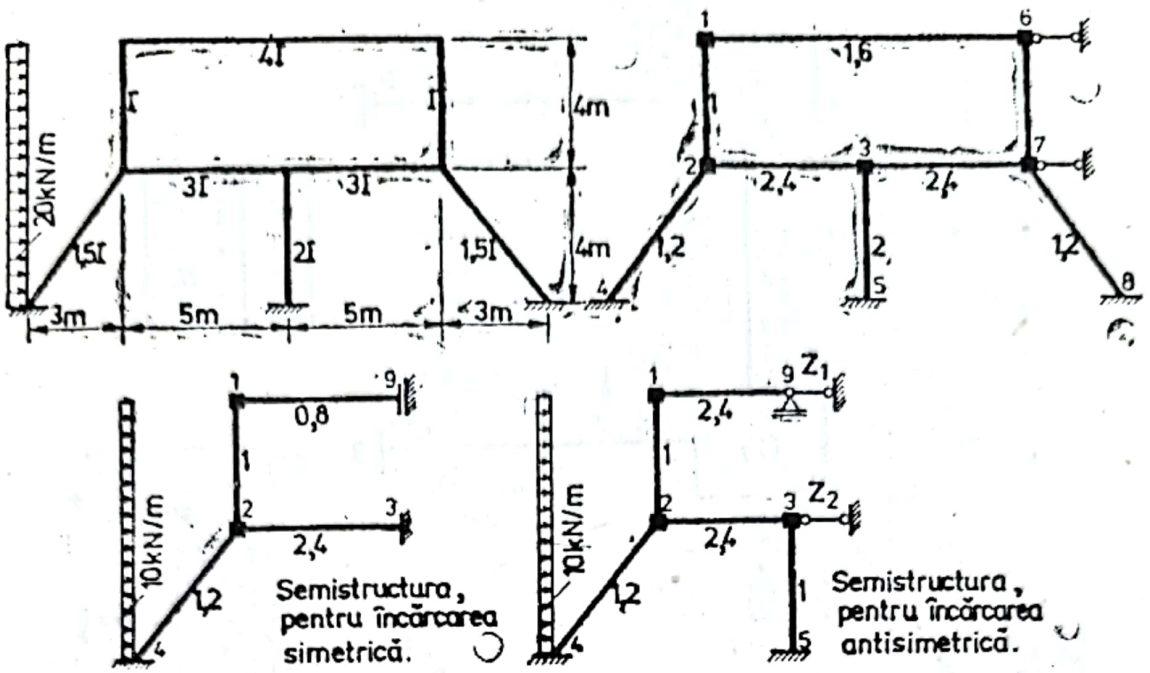


Fig. 13.16

corespunzătoare acestora. Coeficienții de rigiditate, considerînd $\frac{I}{4} = 1$, sînt prezentați, pentru structura întreagă și pentru semistructuri, în figura 13.16.

Încărcarea simetrică. În acest caz structura se comportă ca un cadru cu noduri fixe.

Coeficienții de distribuție:

Nodul 1

$$\mu_{12} = -\frac{1}{1,8} = -0,556,$$

$$\mu_{19} = -\frac{0,8}{1,8} = -0,444.$$

Nodul 2

$$\mu_{21} = -\frac{1}{4,6} = -0,217, \quad \mu_{23} = -\frac{2,4}{4,6} = -0,522,$$

$$\mu_{24} = -\frac{1,2}{4,6} = -0,261.$$

Scanned with OKEN Scanner

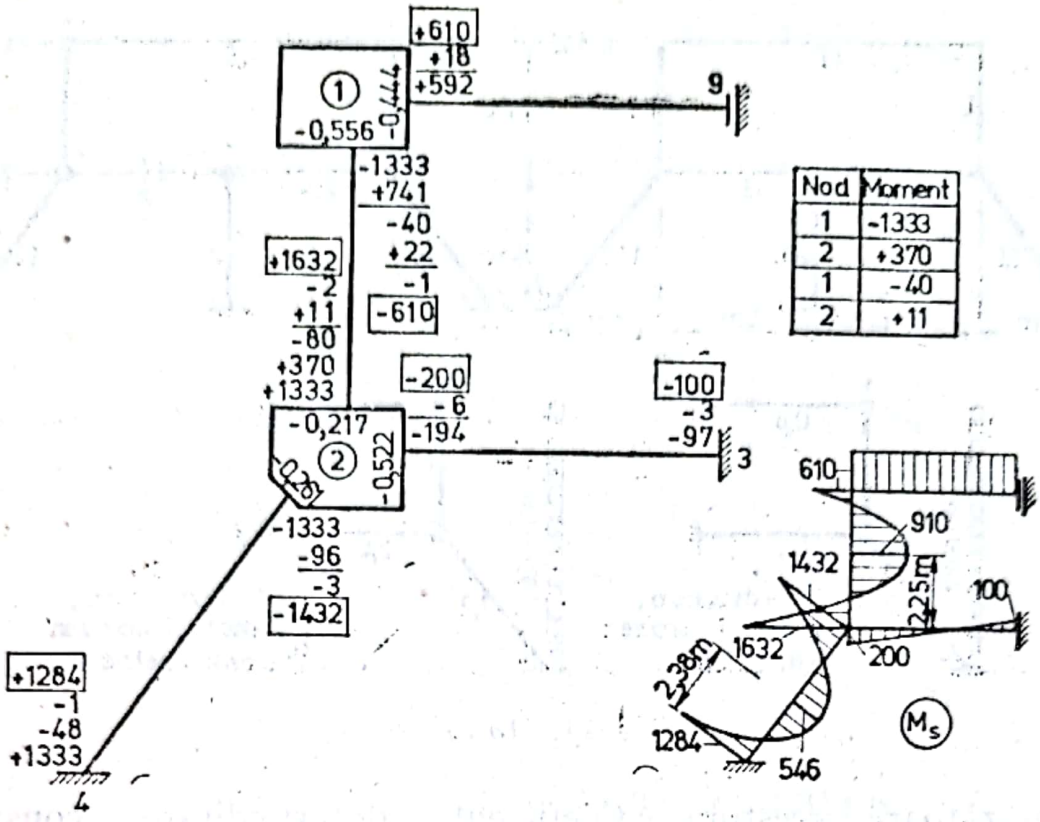


Fig. 13.17

Momentele încovoietoare de încastrare perfectă:

$$\mathfrak{M}_{21} = -\mathfrak{M}_{12} = \frac{pl^2}{12} = 13{,}33 \text{ kNm} = 1333 \text{ daNm},$$

$$\mathfrak{M}_{42} = -\mathfrak{M}_{24} = \frac{pl^2}{12} = 13{,}33 = 1333 \text{ daNm}.$$

În figura 13.17 este reprezentată schema pentru echilibrarea momentelor încovoietoare de încastrare perfectă și diagrama de moment încovoietor finală din încărcarea simetrică.

Încărcarea antisimetrică. Structura are două grade de libertate. Coeficienții de distribuție:

Nodul 1

$$\mu_{12} = -\frac{1}{3{,}4} = -0{,}294,$$

$$\mu_{19} = -\frac{2{,}4}{3{,}4} = -0{,}706.$$

Scanned with OKEN Scanner

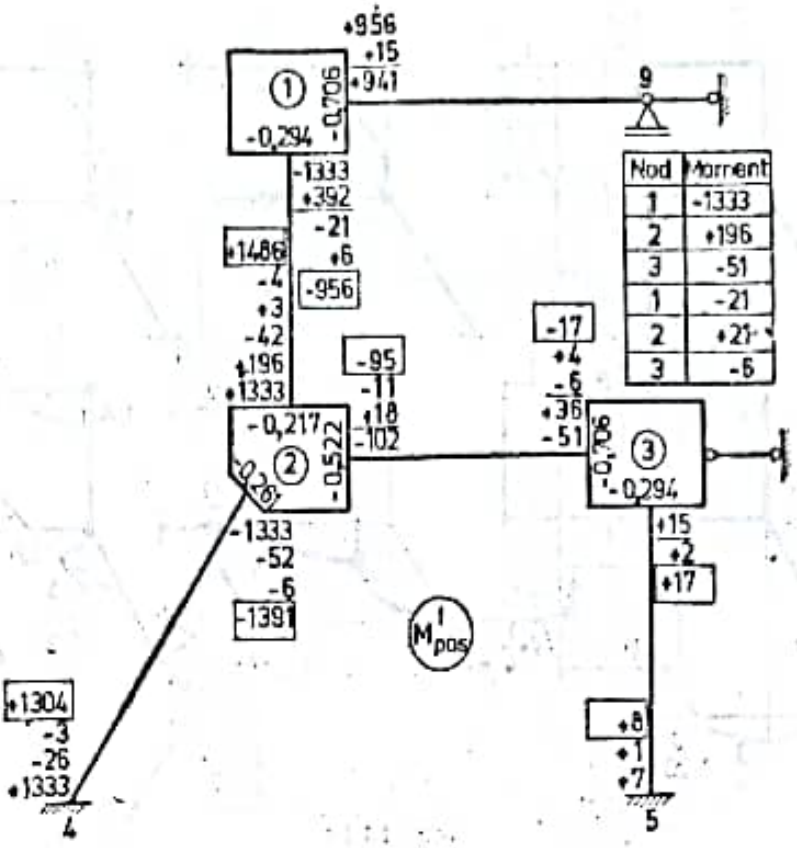


Fig. 13.18.

Nodul 3

$$\mu_{32} = -\frac{2,4}{3,4} = -0,706,$$

$$\mu_{35} = -\frac{1}{3,4} = -0,204.$$

În nodul 2 sînt aceiași coeficienți de distribuție ca și în cazul încărcării simetrice.

Momentele încovoietoare de încastrare perfectă au aceleași valori ca pentru încărcarea simetrică. În figura 13.18 este prezentată schema de iterare a momentelor încovoietoare de încastrare perfectă din încărcarea antisimetrică, pe structura cu noduri fixe.

Încărcînd semistructura pe rînd cu deplasările $Z_1 = 1$ și $Z_2 = 1$, se obțin pozițiile deplasate și diagramele m_1 și m_2, reprezentate în figura 13.19.

Scanned with OKEN Scanner

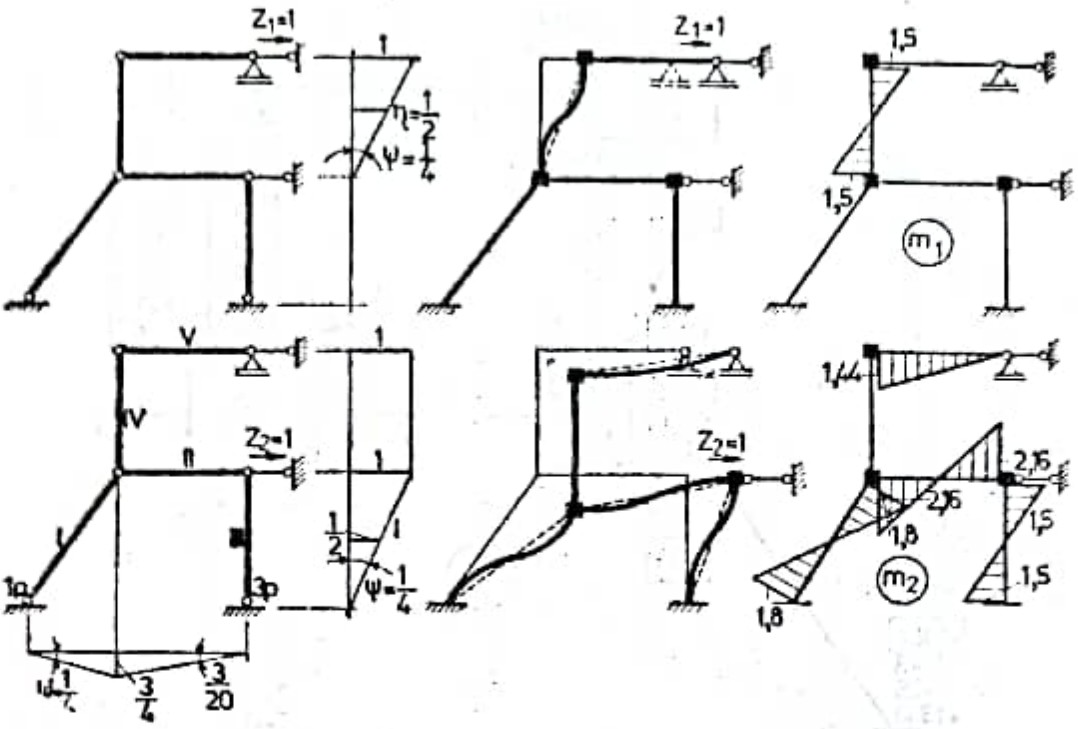


Fig. 13.19

Prin echilibrarea momentelor încovoietoare din diagramele m_1 și m_2 se obțin diagramele m_1^f și m_2^f, reprezentate în figura 13.20.

Ecuațiile de condiție sînt:

$$\begin{cases} L_{11}Z_1 + L_{12}Z_2 + L_{1p} = 0 \\ L_{21}Z_1 + L_{22}Z_2 + L_{2p} = 0. \end{cases}$$

Coeficienții necunoscutelor și termenii liberi se obțin încărcînd sistemul format din bare articulate, separat, cu momentele încovoietoare M_p^f și forțele exterioare, cu momentele încovoietoare m_1^f și cu momentele încovoietoare m_2^f, calculîndu-se lucrul mecanic al acestora pentru deplasările virtuale $\bar{Z}_1 = 1$ și $\bar{Z}_2 = 1$. Schema articulată, cu încărcările ce-i revin, se vede în figura 13.21.

$$L_{11} = -(950 + 991)\frac{1}{4} = -485{,}25,$$

$$L_{22} = -416 \cdot \frac{3}{20} - (1968 + 1701)\frac{3}{20} -$$

$$- (1775 + 1787)\frac{1}{4} - (1701 + 1600)\frac{1}{4} = -2328{,}5,$$

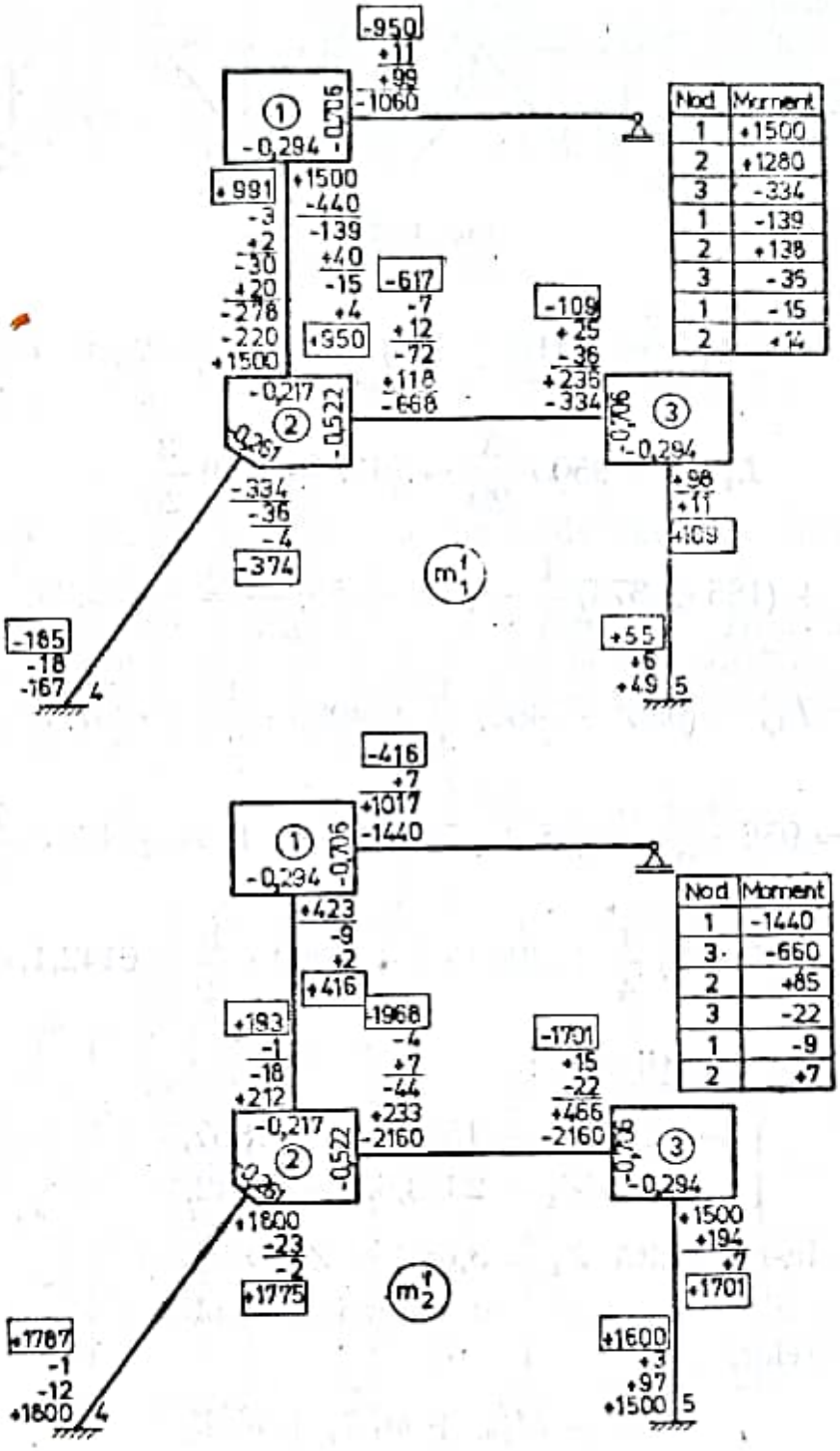


Fig. 13.20

Scanned with OKEN Scanner

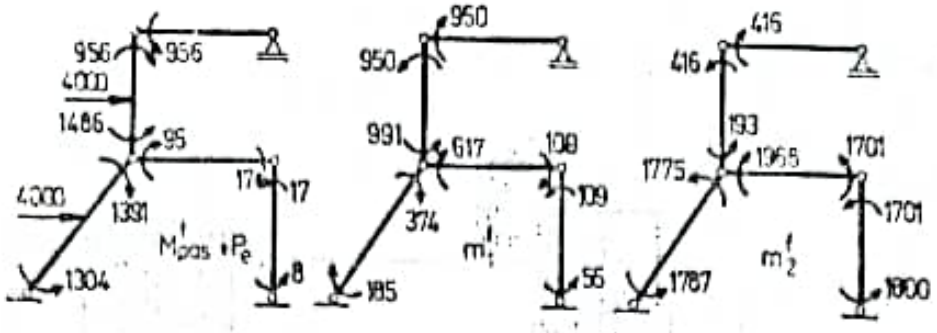


Fig. 13.21

$$L_{12} = -(416 + 193)\frac{1}{4} = -152{,}25,$$

$$L_{21} = -950 \cdot \frac{3}{20} - (617 + 109)\frac{3}{20} +$$

$$+ (185 + 374)\frac{1}{4} - (109 + 55)\frac{1}{4} = -152{,}25,$$

$$L_{1p} = (956 - 1486)\frac{1}{4} + 4000 \cdot \frac{1}{2} = 1867{,}5,$$

$$L_{2p} = 956 \cdot \frac{3}{20} - (95 + 17)\frac{3}{20} - (-1304 + 1391)\frac{1}{4} -$$

$$-(17 + 8)\frac{1}{4} + 4000 \cdot 1 + 4000 \cdot \frac{1}{2} = 6142{,}1.$$

Sistemul de ecuaţii este:

$$\begin{cases} -485{,}25Z_1 - 152{,}25Z_2 + 1867{,}5 = 0 \\ -152{,}25Z_1 - 2328{,}5Z_2 + 6142{,}1 = 0 \end{cases}$$

Rezolvîndu-l rezultă $Z_1 = 3{,}086$ şi $Z_2 = 2{,}436$.

Diagrama din încărcarea antisimetrică se obţine efectuînd suprapunerea efectelor,

$$M_{as} = M^f_{pas} + m^f_1 Z_1 + m^f_2 Z_2$$

şi este reprezentată în figura 13.22.

Scanned with OKEN Scanner

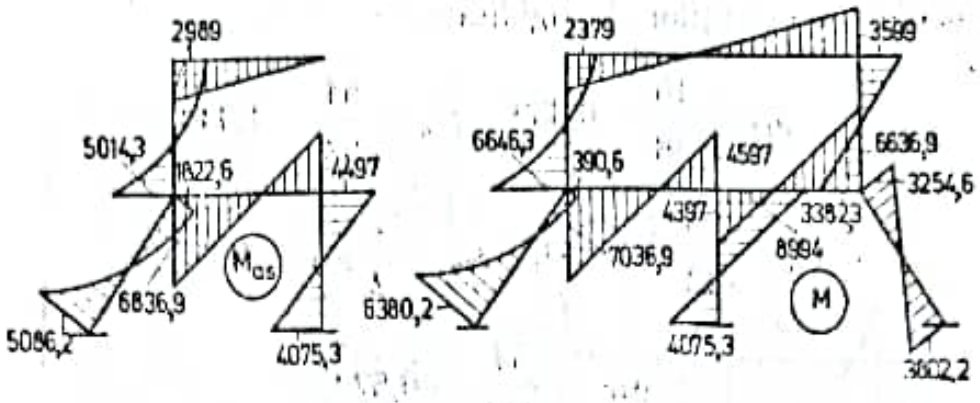


Fig. 13.22

Diagrama finală de moment încovoietor, pentru încărcarea dată, se obține suprapunînd diagramele din cele două încărcări, simetrică și antisimetrică,

$$M = M_s + M_{as}.$$

Problema 13.8. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 13.23.

Structura este simetrică și încărcată simetric. Deși are nodurile deplasabile, pentru încărcarea simetrică, ea se comportă ca o structură cu noduri fixe. Operația de iterare se conduce pe semistructură.

Calculul momentelor de inerție:

$$I_{12} = I_{23} = I_{45} = \frac{3 \cdot 4^3}{12} = 16 \text{ dm}^4,$$

$$I_{25} = I_{33'} = \frac{3 \cdot 6^3}{12} = 59 \text{ dm}^4.$$

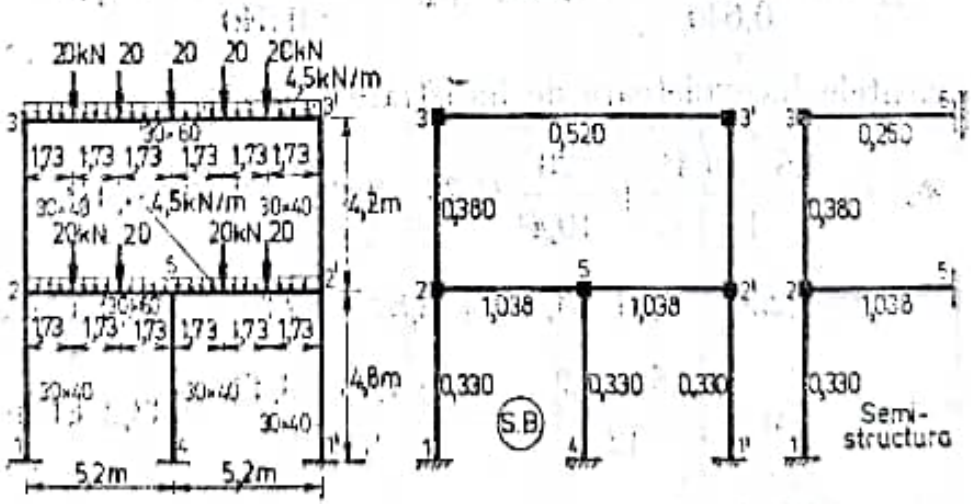


Fig. 13.23

Calculul coeficienților de rigiditate:

$$\rho_{12} = \frac{16}{48} = 0{,}330, \quad \rho_{25} = \frac{54}{52} = 1{,}038,$$

$$\rho_{23} = \frac{16}{42} = 0{,}380, \quad \rho_{36} = \frac{1}{2}\rho_{33'} = 0{,}260,$$

$$\rho_{33'} = \frac{54}{104} = 0{,}520.$$

Suma coeficienților de rigiditate ai barelor, din fiecare nod, pe semistructură:

$$\sum_{2} \rho_{2i} = 1{,}748, \qquad \sum_{3} \rho_{3i} = 0{,}640.$$

Calculul coeficienților de distribuție:

Nodul 1

$$\mu_{21} = -\frac{0{,}330}{1{,}748} = -0{,}189, \quad \mu_{25} = -\frac{1{,}038}{1{,}748} = -0{,}593,$$

$$\mu_{23} = -\frac{0{,}380}{1{,}748} = -0{,}218,$$

Nodul 3

$$\mu_{32} = -\frac{0{,}380}{0{,}640} = -0{,}593, \quad \mu_{36} = -\frac{0{,}260}{0{,}640} = -0{,}407.$$

Momentele încovoietoare de încastrare perfectă:

$$\mathfrak{M}_{33'} = \frac{4{,}5 \cdot 10{,}4^2}{12} + \frac{20}{10{,}4^2}(1{,}73 \cdot 8{,}47^2 + 3{,}46 \cdot 6{,}94^2 +$$

$$+ 5{,}20 \cdot 5{,}20^2 + 6{,}94 \cdot 3{,}46^2 + 8{,}67 \cdot 1{,}73^2) = 138{,}9 \text{ kNm},$$

$$\mathfrak{M}_{25} = -\mathfrak{M}_{52} = \frac{4{,}5 \cdot 5{,}2^2}{12} + \frac{20 \cdot 1{,}73 \cdot 3{,}47}{5{,}2} = 32{,}2 \text{ kNm}.$$

În figura 13.24 sînt prezentate, schema de calcul și diagrama de moment încovoietor.

Scanned with OKEN Scanner

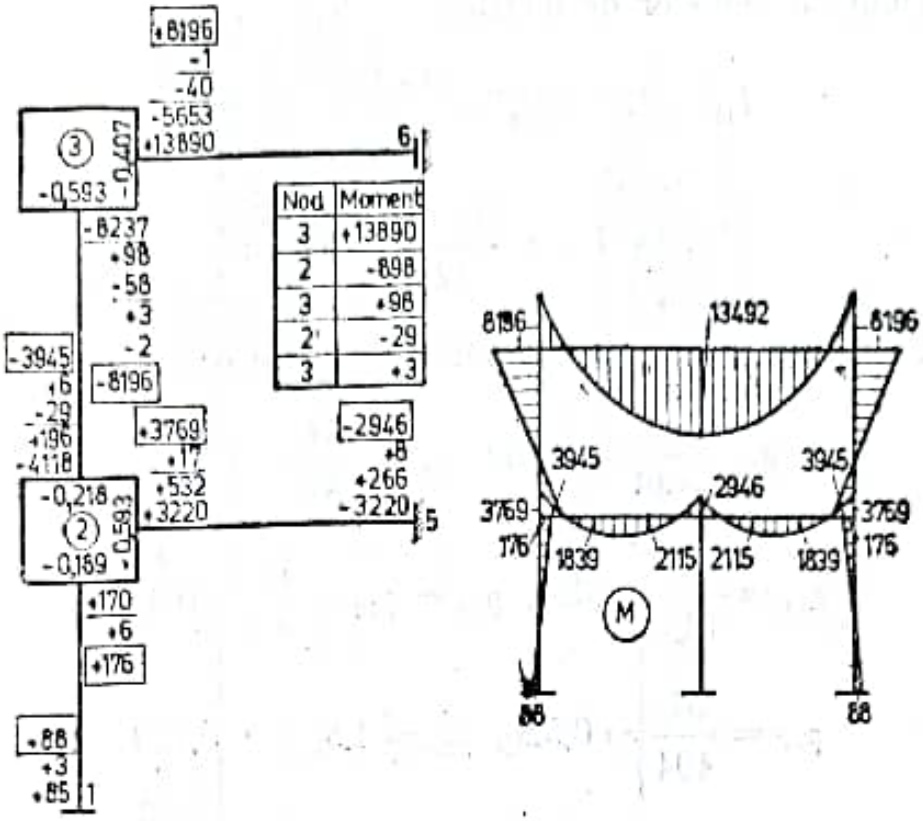


Fig. 13.24

Problema 13.9. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura cu noduri deplasabile din figura 13.25.

Momentele încovoietoare din acțiunea forțelor exterioare (M_p^f) și din deplasările-unitate pe direcțiile gradelor de libertate (m_1^f și m_2^f) se vor calcula pe semistructura corespunzătoare încărcării antisimetrice.

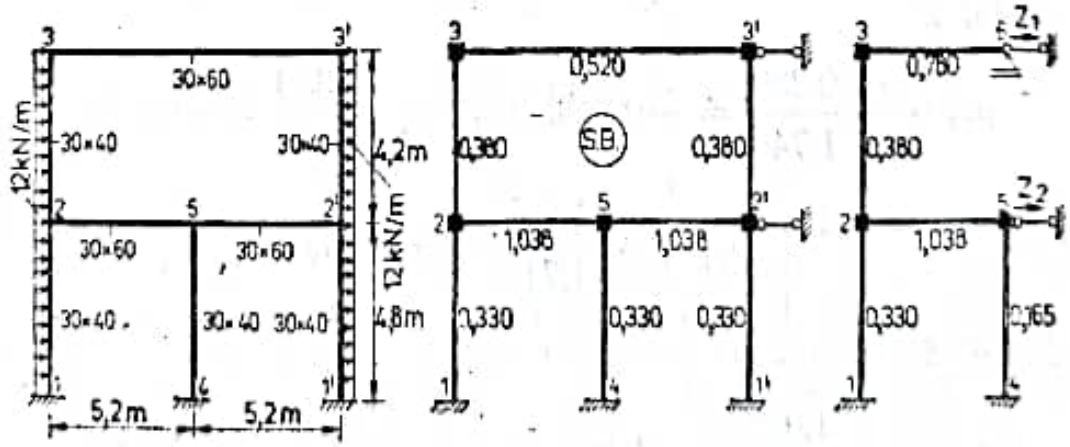


Fig. 13.25

Scanned with OKEN Scanner

Calculul momentelor de inerție:

$$I_{12} = I_{23} = I_{45} = \frac{3 \cdot 4^3}{12} = 16 \text{ dm}^4,$$

$$I_{25} = I_{33'} = \frac{3 \cdot 6^3}{12} = 54 \text{ dm}^4.$$

Calculul coeficienților de rigiditate ai barelor:

$$\rho_{12} = \frac{16}{48} = 0{,}330, \quad \rho_{25} = \frac{54}{52} = 1{,}038,$$

$$\rho_{23} = \frac{16}{42} = 0{,}380, \quad \rho_{45} = \rho_{12} = \frac{16}{48} = 0{,}330,$$

$$\rho_{33'} = \frac{54}{104} = 0{,}520, \quad \rho_{36} = 1{,}5\rho_{33'} = 0{,}780.$$

Suma coeficienților de rigiditate ai barelor, din noduri:

$$\sum_2 \rho_{2i} = 1{,}748, \quad \sum_5 \rho_{5i} = 1{,}203, \quad \sum_3 \rho_{3i} = 1{,}160.$$

Calculul coeficienților de distribuție:

Nodul 3

$$\mu_{32} = -\frac{0{,}380}{1{,}160} = -0{,}327, \quad \mu_{36} = -\frac{0{,}780}{1{,}160} = -0{,}673,$$

Nodul 2

$$\mu_{23} = -\frac{0{,}380}{1{,}748} = -0{,}218, \quad \mu_{21} = -\frac{0{,}330}{1{,}748} = -0{,}189,$$

$$\mu_{25} = -\frac{1{,}038}{1{,}748} = -0{,}593,$$

Nodul 5

$$\mu_{52} = -\frac{1{,}038}{1{,}203} = -0{,}862, \quad \mu_{54} = -\frac{0{,}165}{1{,}203} = -0{,}138.$$

Scanned with OKEN Scanner

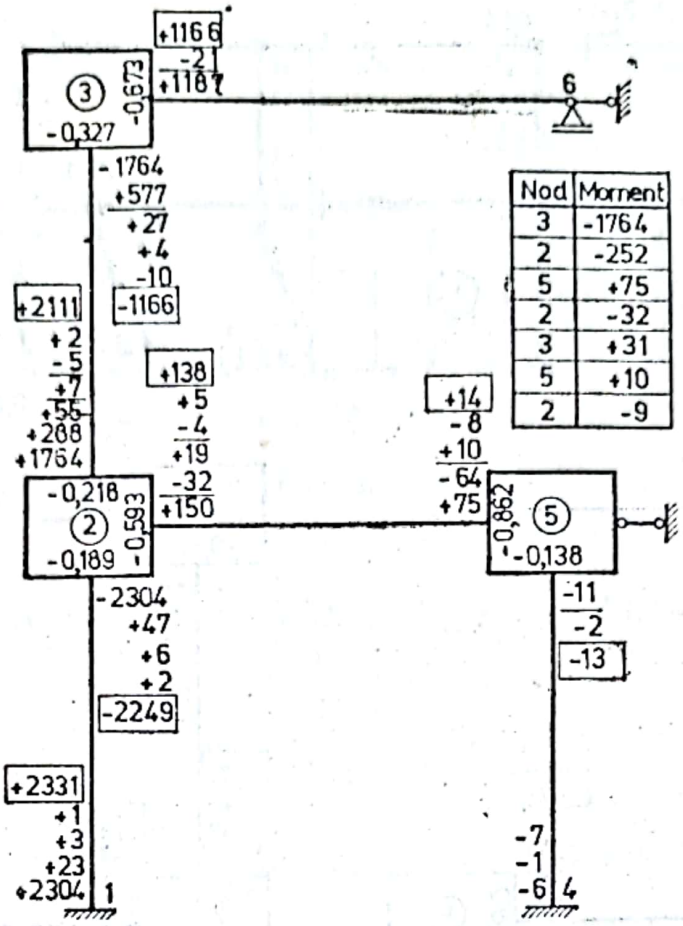


Fig. 13.26

Momentele încovoietoare de încastrare perfectă din încărcarea cu forţele exterioare:

$$\mathfrak{M}_{12} = -\mathfrak{M}_{21} = \frac{pl^2}{12} = \frac{12 \cdot 4{,}8^2}{12} = 23{,}04 \text{ kNm} = 2304 \text{ daNm},$$

$$\mathfrak{M}_{23} = -\mathfrak{M}_{32} = \frac{12 \cdot 4{,}2^2}{12} = 17{,}64 \text{ kNm} = 1764 \text{ daNm}.$$

Calculul momentelor încovoietoare produse de forţele exterioare pe structura cu noduri fixe se efectuează în schema din figura 13.26.

Din încărcările cu deplasările $Z_1 = 1$ şi $Z_2 = 1$, pe direcţiile gradelor de libertate, rezultă poziţiile deplasate şi momentele încovoietoare pe sistemul de bază, prezentate în figura 13.27. Echilibrînd prin metoda Cross momentele încovoietoare din diagramele m_1 şi m_2, se obţin momentele încovoietoare m_1^f şi m_2^f.

Scanned with OKEN Scanner

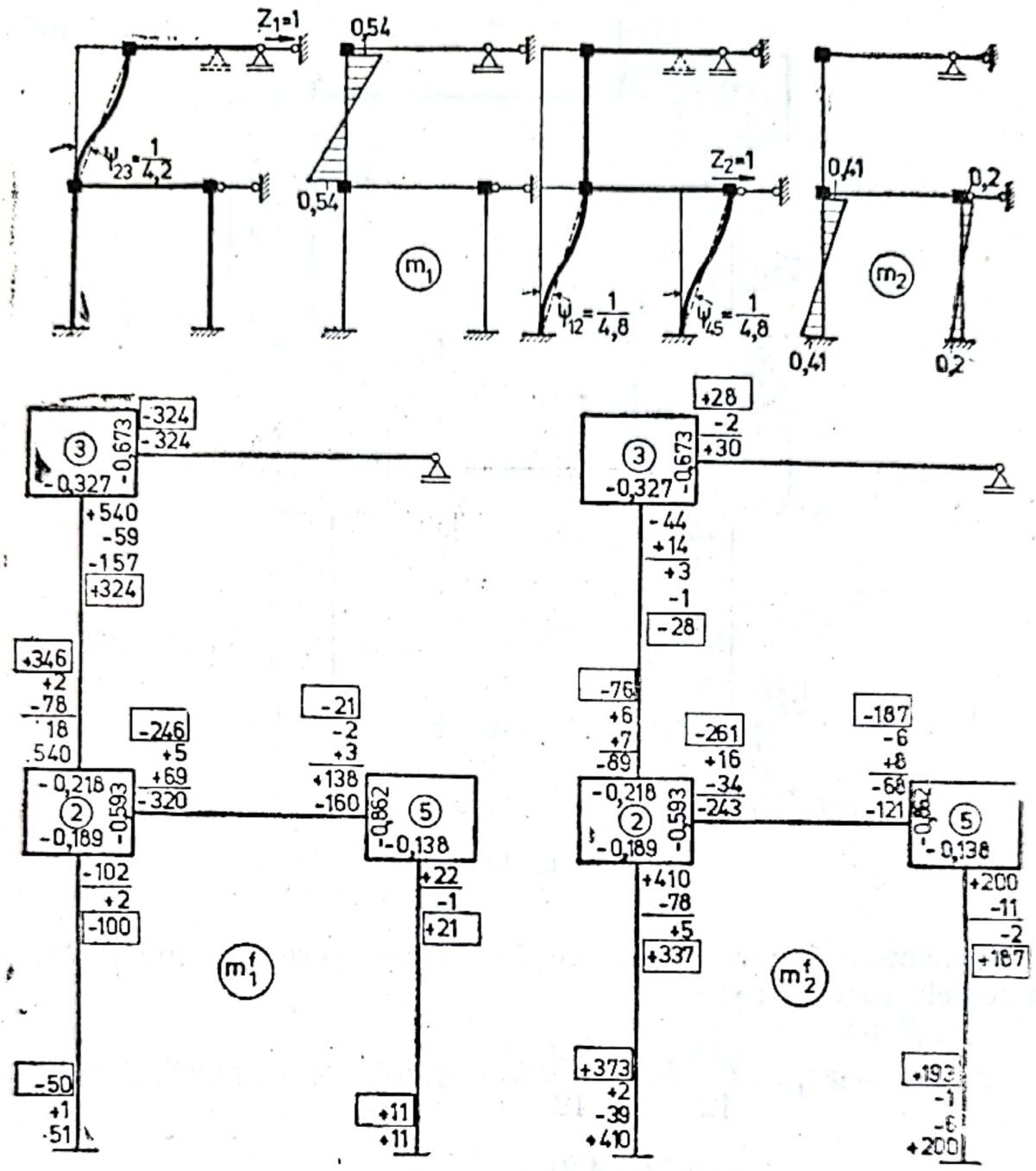


Fig. 13.27

Sistemul de ecuaţii pentru determinarea deplasărilor pe direcţiile gradelor de libertate:

$$\begin{cases} L_{11}Z_1 + L_{12}Z_2 + L_{1p} = 0 \\ L_{21}Z_1 + L_{22}Z_2 + L_{2p} = 0. \end{cases}$$

Schema formată din bare articulate, încărcată cu eforturile, forţele, precum şi deplasările $\bar{Z}_1 = 1$ şi $\bar{Z}_2 = 1$ se prezintă în figura 13.28.

Scanned with OKEN Scanner

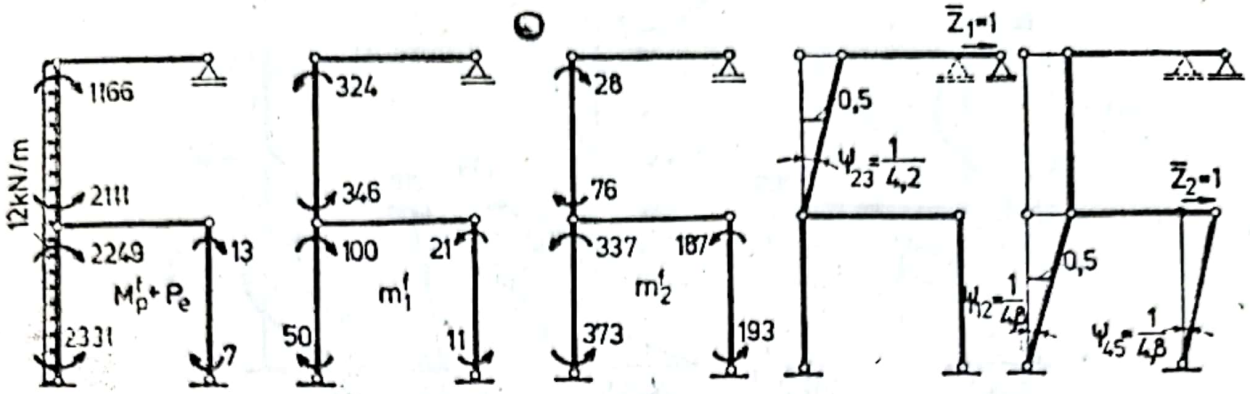


Fig. 13.28

Coeficienții necunoscutelor și termenii liberi ai sistemului de ecuații sînt:

$$L_{11} = -(324 + 346)\frac{1}{4,2} = -159,5, \quad L_{22} = -(337 + 373 + 193 + 187)\frac{1}{4,8} = -227,$$

$$L_{12} = (28 + 76)\frac{1}{4,2} = 24,76, \quad L_{21} = (100 + 50)\frac{1}{4,8} - (21 + 11)\frac{1}{4,8} = 24,76,$$

$$L_{1p} = (1166 - 211)\frac{1}{4,8} + 25,2 = 252,58,$$

$$L_{2p} = (2249 - 2331)\frac{1}{4,8} + (7 + 19)\frac{1}{4,8} + 79,2 = 66,29.$$

Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} -159,5Z_1 + 24,76Z_2 + 252,50 = 0 \\ 24,76Z_1 - 227Z_2 + 66,29 = 0 \end{cases}$$

iar soluția, $Z_1 = 1,65$ și $Z_2 = 0,472$.

Diagrama finală se stabilește prin suprapunerea de efecte,

$$M = M_p^f + m_p^f Z_1 + m_2^f Z_2$$

și este reprezentată pe semistructură și pe structură, în figura 13.29.

Scanned with OKEN Scanner

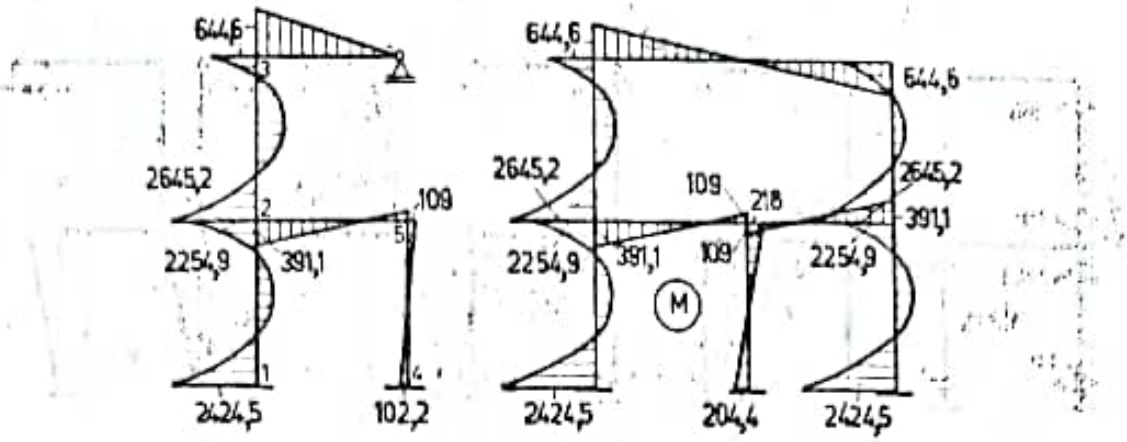


Fig. 13.29

$$M_{12} = 2331 + (-50) \cdot 1{,}65 + 373 \cdot 0{,}472 = 2424{,}5 \text{ daNm},$$

$$M_{21} = -2249 - 100 \cdot 1{,}65 + 337 \cdot 0{,}472 = -2254{,}9 \text{ daNm},$$

$$M_{23} = 2111 + 346 \cdot 1{,}65 - 76 \cdot 0{,}472 = 2645{,}2 \text{ daNm},$$

$$M_{32} = -1166 + 324 \cdot 1{,}65 - 28 \cdot 0{,}472 = -2645{,}2 \text{ daNm},$$

$$M_{36} = -1166 - 324 \cdot 1{,}65 + 28 \cdot 0{,}472 = 644{,}6 \text{ daNm},$$

$$M_{25} = 138 - 246 \cdot 1{,}65 - 261 \cdot 0{,}472 = -391{,}1 \text{ daNm},$$

$$M_{52} = 14 - 21 \cdot 1{,}65 - 187 \cdot 0{,}472 = -109 \text{ daNm},$$

$$M_{54} = -13 + 21 \cdot 1{,}65 + 187 \cdot 0{,}472 = 109 \text{ daNm},$$

$$M_{45} = -7 + 11 \cdot 1{,}65 + 193 \cdot 0{,}472 = 102{,}2 \text{ daNm}.$$

Problema 13.10. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 13.30, utilizînd metoda Cross.

Calculul elementelor geometrice; lungimi și momente de inerție:

$$l_{23} = l_{24} = 4{,}5\sqrt{2} = 6{,}34 \text{ m},$$

$$I^c_{12} = \frac{4 \cdot 6^3}{12} = 72 \text{ dm}^4, \quad I^c_{24} = \frac{4 \cdot 6^3}{12} = 72 \text{ dm}^4,$$

$$I'_{21} = \frac{4 \cdot 9^3}{12} = 234 \text{ dm}^4, \quad I'_{24} = I'_{42} = \frac{4 \cdot 9^3}{12} = 243 \text{ dm}^4,$$

$$I_{23} = I_{34} = \frac{4 \cdot 6^3}{12} = 72 \text{ dm}^4, \quad I_{25} = I_{46} = \frac{4{,}5 \cdot 6^3}{12} = 81 \text{ dm}^4.$$

Scanned with OKEN Scanner

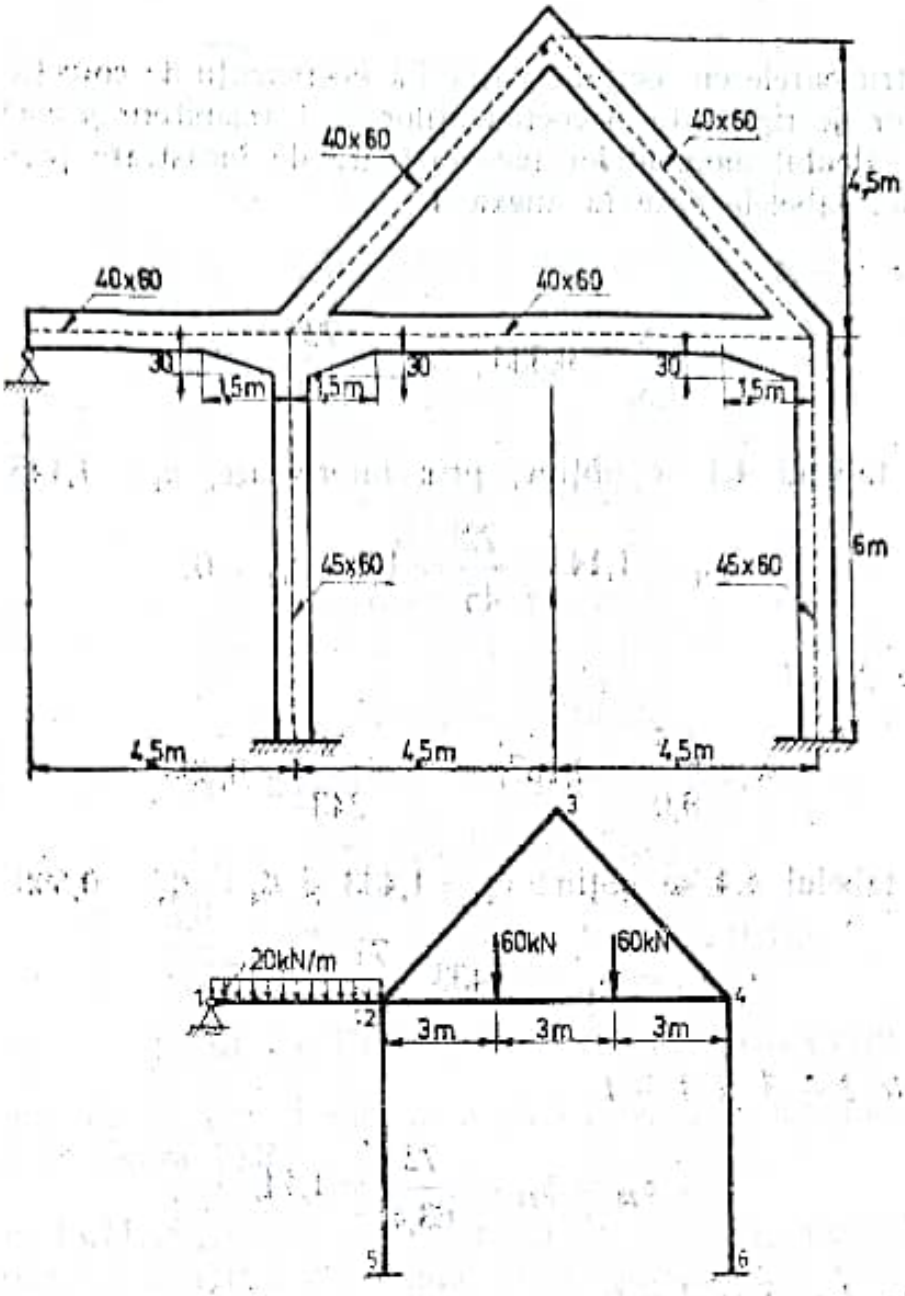


Fig. 13.30

Rigidităţi, coeficienţi de distribuţie şi transmitere:

$\rho_{ij} = v\dfrac{I_0}{l_{ij}}$ — pentru barele cu secţiune variabilă, unde I_0 este momentul de inerţie minim,

$\rho_{ij} = \dfrac{I}{l_{ij}}$ — pentru barele cu secţiune constantă,

t'_{ji} — coeficient de transmitere la nodul j, a momentului încovoietor produs de rotirea noului i,

μ_{ij} — coeficient de distribuţie a momentului neechilibrat din nodul i, pentru bara ij.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru barele cu secțiune variabilă, coeficienții de corecție a coeficienților de rigiditate, a coeficienților de transmitere și coeficienții pentru calculul momentelor încovoietoare de încastrare perfectă se obțin din tabelele date în anexa 4.

Bara 1 – 2

$$\lambda = \frac{1,5}{4,5} = 0,333; \quad n = \frac{72}{243} = 0,296.$$

Din tabelul 4.1 se obține, prin interpolare, $v_3 = 1,145$.

$$\rho_{21} = 1,145 \cdot \frac{72}{45} = 1,83; \quad l'_{12} = 0.$$

Bara 2 – 4

$$\lambda = \frac{1,5}{9,0} = 0,167, \quad n = \frac{72}{243} = 0,296.$$

Din tabelul 4.4 se obțin: $v_4 = 1,433$ și $l'_{24} = l'_{42} = 0,590$.

$$\rho_{24} = \rho_{42} = 1,433 \cdot \frac{72}{90} = 1,15,$$

Barele 2 – 3 și 3 – 4

$$\rho_{23} = \rho_{34} = \frac{72}{63,4} = 1,14,$$

Barele 2 – 5 și 4 – 6

$$\rho_{25} = \rho_{46} = \frac{81}{60} = 1,35,$$

Coeficienții de distribuție:

$$\sum_2 \rho_{2i} = 1,83 + 1,14 + 1,15 + 1,35 = 5,47,$$

$$\mu_{21} = -\frac{1,83}{5,47} = -0,335, \quad \mu_{24} = -\frac{1,15}{5,47} = -0,210,$$

$$\mu_{23} = -\frac{1,14}{5,47} = -0,208, \quad \mu_{25} = -\frac{1,35}{5,47} = -0,247,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\sum_3 \rho_{3i} = 1{,}14 + 1{,}14 = 2{,}28,$$

$$\mu_{32} = \mu_{34} = -\frac{1{,}14}{2{,}28} = -0{,}5,$$

$$\sum_4 \rho_{4i} = 1{,}15 + 1{,}14 + 1{,}35 = 3{,}64,$$

$$\mu_{42} = -\frac{1{,}15}{3{,}64} = -0{,}316, \quad \mu_{46} = -\frac{1{,}35}{3{,}64} = -0{,}371,$$

$$\mu_{43} = -\frac{1{,}14}{3{,}64} = -0{,}313.$$

Pentru bare cu secțiune constantă $t'_{ij} = 0{,}5$.
Momentele încovoietoare de încastrare perfectă:

$$\mathfrak{M}_{21} = w_1 p l^2; \quad w_1 = 0{,}160,$$

$$\mathfrak{M}_{21} = 0{,}160 \cdot 20 \cdot 4{,}5^2 = 64{,}8 \text{ kNm} = 6480 \text{ daNm},$$

$$\mathfrak{M}_{24} = -\mathfrak{M}_{42} = w_7^{(1)} P_1 + w_7^{(2)} P_2,$$

$$\frac{a}{l} = \frac{3{,}0}{9{,}0} = 0{,}333; \quad w_7^{(1)} = 0{,}180, \quad w_7^{(2)} = 0{,}076,$$

$$\mathfrak{M}_{24} = -\mathfrak{M}_{42} = (0{,}180 + 0{,}076) \cdot 60 \cdot 9 = 138{,}4 \text{ kNm} = 13840 \text{ daNm}.$$

Schema de iterare și diagrama finală de moment încovoietor sînt date în figura 13.31.

Problema 13.11. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura simetrică din figura 13.32, prin metoda Cross.

Momentele de inerție:

$$I^c_{11'} = \frac{4 \cdot 6^3}{12} = 72 \text{ dm}^4, \quad I_{23} = \frac{4 \cdot 5^3}{12} = 41{,}7 \text{ dm}^4,$$

$$I^r_{11'} = \frac{4 \cdot 9^3}{12} = 243 \text{ dm}^4, \quad I^r_{24} = \frac{3{,}5 \cdot 7^3}{12} = 100 \text{ dm}^4,$$

$$I_{12} = \frac{4 \cdot 7^3}{12} = 114{,}5 \text{ dm}^4, \quad I^c_{24} = \frac{5{,}3 \cdot 5^3}{12} = 36{,}5 \text{ dm}^4,$$

$$I_{21} = \frac{4 \cdot 4^3}{12} = 21{,}3 \text{ dm}^4, \quad I_{45} = \frac{4 \cdot 6^3}{12} = 72 \text{ dm}^4.$$

Scanned with OKEN Scanner

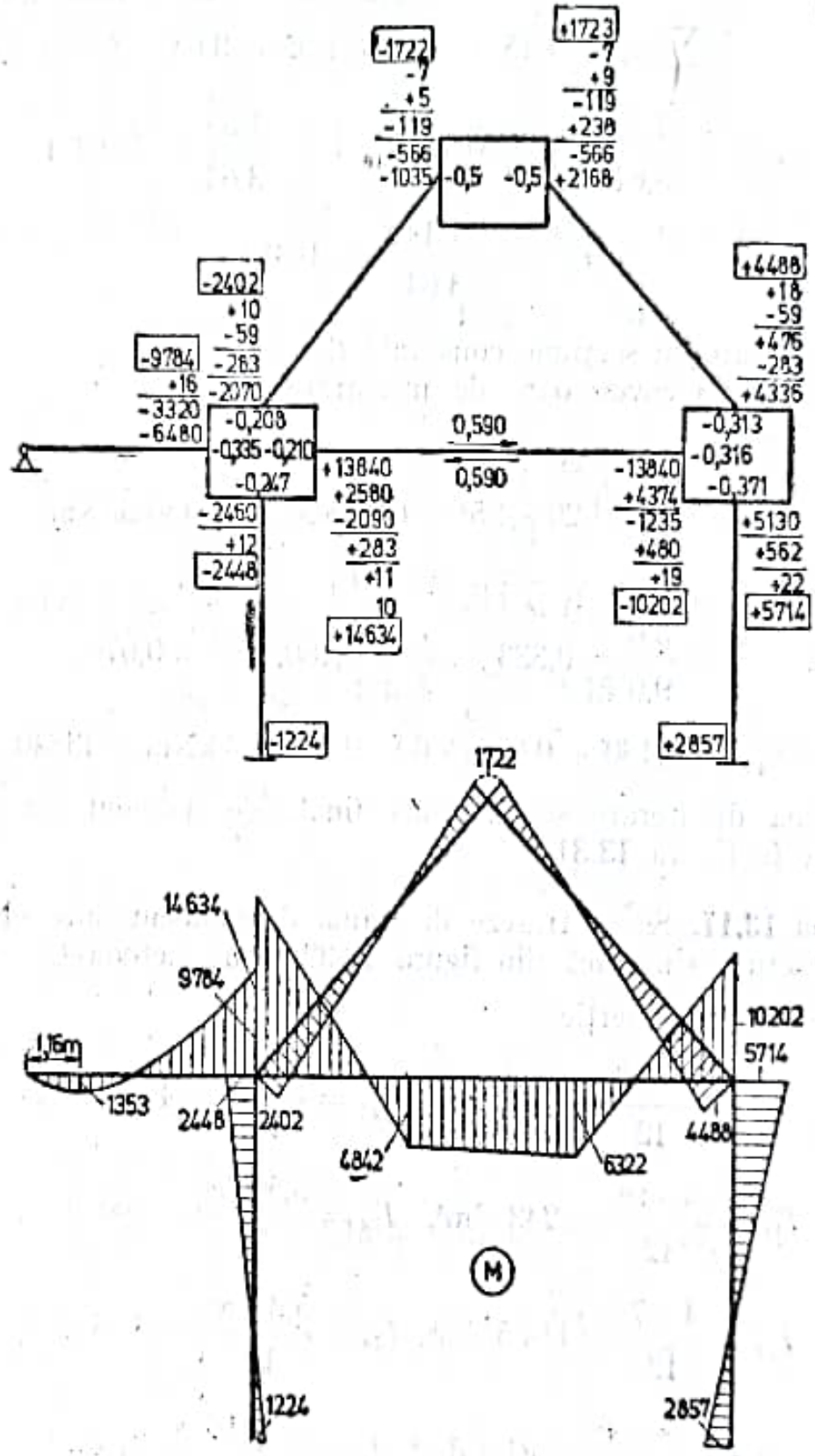


Fig. 13.31

Scanned with OKEN Scanner

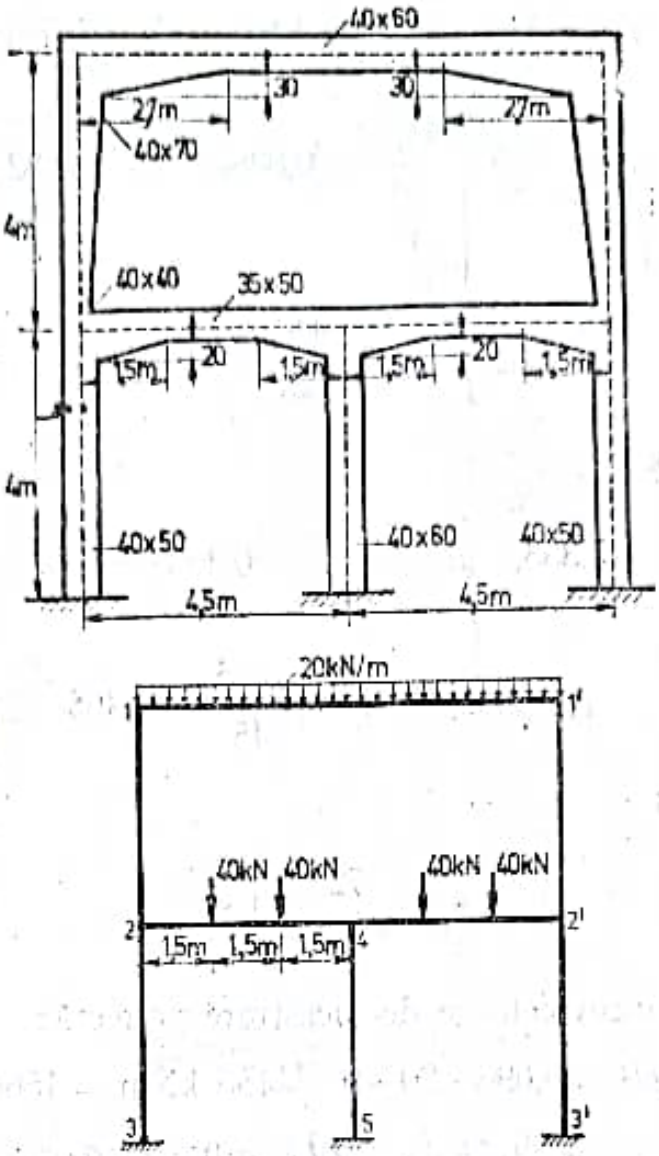


Fig. 13.32

Rigiditățile și coeficienții de transmitere:

Bara 1 — 1'

$$\lambda = \frac{2,70}{9,0} = 0,3, \quad n = \frac{I_0}{I_r} = \frac{72}{243} = 0,296,$$

$$\rho_{11'}^{\varepsilon} = 0,5\, v_0 \frac{I_0}{l} = 0,5 \cdot 1,362 \cdot \frac{72}{90} = 0,681 \cdot 0,8 = 0,544.$$

Bara 1 — 2

$$\lambda = 1,0, \quad n = \frac{21,3}{114,5} = 0,0186,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\rho_{12} = 3{,}64 \cdot \frac{21{,}3}{40} = 1{,}94, \qquad t'_{12} = 0{,}761,$$

$$\rho_{21} = 1{,}55 \cdot \frac{21{,}3}{40} = 0{,}828, \qquad t'_{21} = 0{,}324.$$

Bara 2 — 3

$$\rho_{23} = \rho_{32} = \frac{41{,}7}{40} = 1{,}042,$$

Bara 2 — 4

$$\lambda = \frac{1{,}50}{4{,}50} = 0{,}333, \qquad n = \frac{36{,}5}{100} = 0{,}365, \qquad t'_{24} = t'_{42} = 0{,}620,$$

$$\rho_{24} = \rho_{42} = 1{,}80 \cdot \frac{36{,}5}{45} = 1{,}465.$$

Bara 4 — 5

$$\rho_{45} = \frac{72}{40} = 1{,}80.$$

Momentele încovoietoare de încastrare perfectă:

$$\mathfrak{M}_{11'} = w_7 p l^2 = 0{,}096 \cdot 20 \cdot 9^2 = 156 \text{ kNm} = 15600 \text{ daNm},$$

$$\mathfrak{M}_{24} = -\mathfrak{M}_{42} = w_8^{(1)} P_1 l + w_8^{(2)} P_2 l = (0{,}178 + 0{,}073)40 \cdot 4{,}5 =$$
$$= 45{,}2 \text{ kNm} = 4520 \text{ daNm}.$$

Coeficienţii de distribuţie:

$$\sum_1 \rho_{1i} = 0{,}544 + 1{,}940 = 2{,}484,$$

$$\mu_{11'} = -\frac{0{,}544}{2{,}484} = -0{,}22; \quad \mu_{12} = -\frac{1{,}940}{2{,}484} = -0{,}78,$$

$$\sum_2 \rho_{2i} = 0{,}828 + 1{,}465 + 1{,}042 = 3{,}335,$$

$$\mu_{21} = -\frac{0{,}828}{3{,}335} = -0{,}247; \quad \mu_{23} = -\frac{1{,}042}{3{,}335} = -0{,}313,$$

Scanned with OKEN Scanner

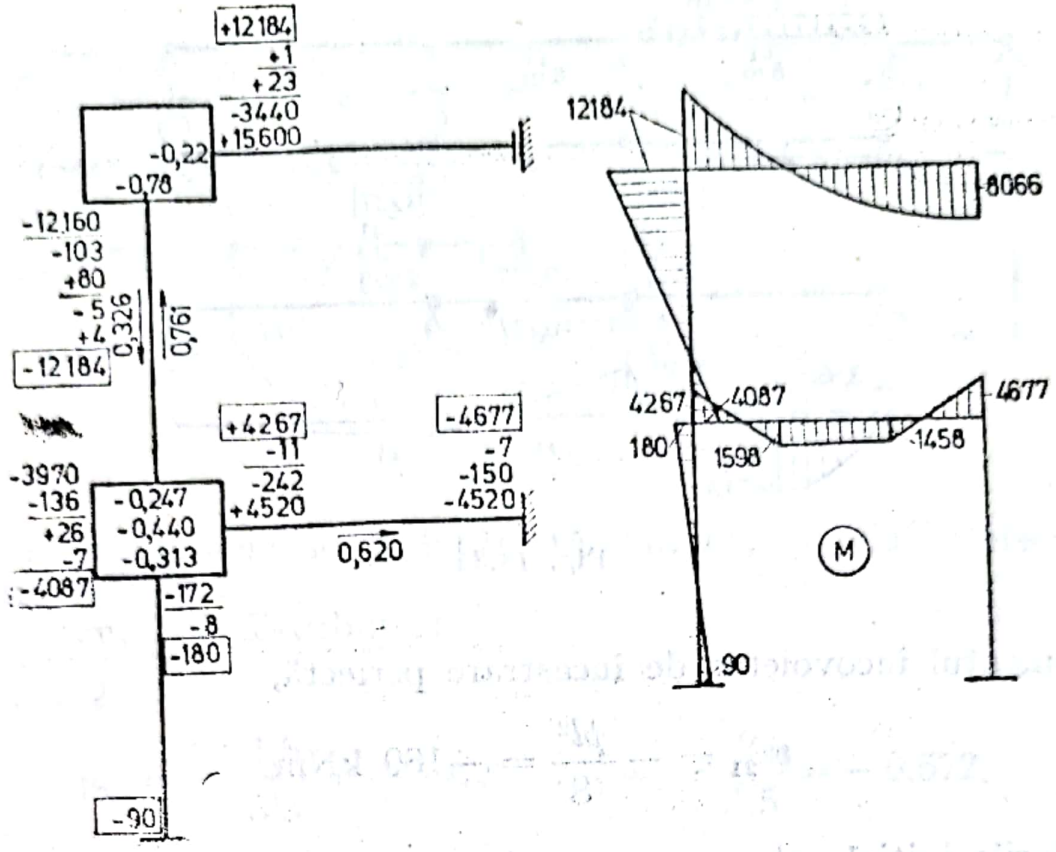


Fig. 13.33

$$\mu_{24} = \frac{1{,}465}{3{,}335} = -0{,}440.$$

Schema de iterare și diagrama finală sînt prezentate în figura 13.33.

Problema 13.12. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la grinda continuă din figura 13.34, utilizînd procedeul iterării rotirilor.

Suma coeficienților de rigiditate ai barelor, în jurul nodurilor 2 3:

$$\sum_{2} \rho_{2i} = 2{,}25 + 2 = 4{,}25,$$

$$\sum_{3} \rho_{3i} = 2 + 2{,}25 = 4{,}25.$$

Coeficienții de transmitere:

$$t_{23} = -\frac{2}{2 \cdot 4{,}25} = -0{,}237\,; \quad t_{32} = -\frac{2}{2 \cdot 4{,}25} = -0{,}237.$$

Scanned with OKEN Scanner

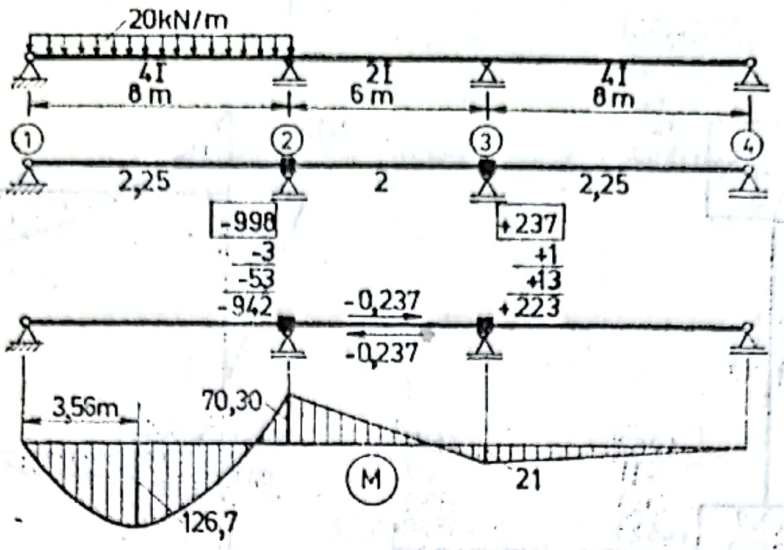


Fig. 13.34

Momentul încovoietor de încastrare perfectă,

$$\mathfrak{M}_{21} = -\frac{pl^2}{8} = -160 \text{ kNm}.$$

Valorile inițiale ale necunoscutelor:

$$Z_2^0 = -\frac{16000}{4 \cdot 4{,}25} = -942,$$

$$Z_3^0 = 0.$$

Schema de iterare este dată în figura 13.34.
Calculul momentelor încovoietoare finale:

$$M_{21} = -16000 - 4 \cdot 2{,}25(-998) = -7030 \text{ daNm},$$

$$M_{23} = -4 \cdot 2(-998) - 2 \cdot 2 \cdot 237 = 7035 \text{ daNm},$$

$$M_{32} = -4 \cdot 2 \cdot 237 - 2 \cdot 2(-998) = 2100 \text{ daNm},$$

$$M_{34} = -4 \cdot 2{,}25 \cdot 237 = 2130 \text{ daNm}.$$

Diagrama finală este, de asemenea, prezentată în figura 13.34

Problema 13.13. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la grinda continuă simetrică din figura 13.35, utilizînd metoda Cross.

Scanned with OKEN Scanner

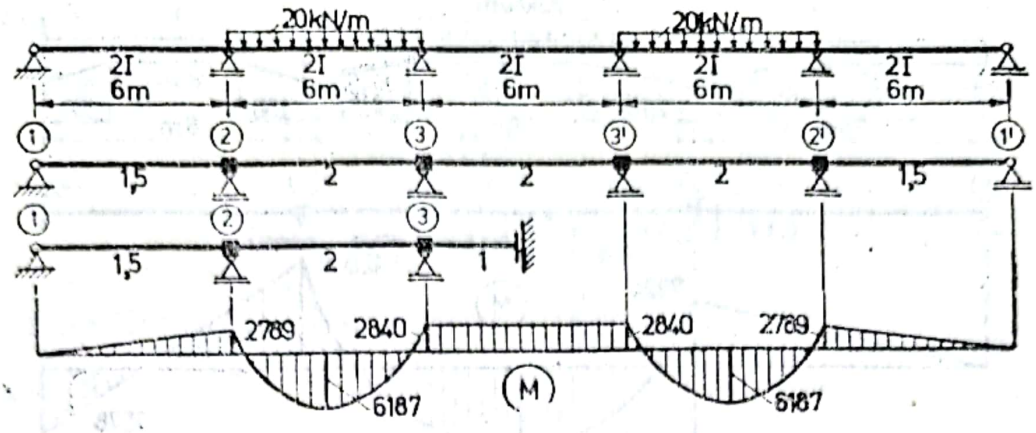


Fig. 13.35

Grinda fiind simetrică şi încărcată simetric, calculul se efectuează pe semistructură.

Coeficienţii de distribuţie:

Nodul 2

$$\mu_{21} = -\frac{1,5}{3,5} = -0,428, \quad \mu_{23} = -\frac{2}{3,5} = -0,572.$$

Nodul 3

$$\mu_{32} = -\frac{2}{3} = -0,666, \quad \mu_{35} = -\frac{1}{3} = -0,334.$$

Momentele încovoietoare de încastrare perfectă:

$$\mathfrak{M}_{23} = -\mathfrak{M}_{32} = \frac{pl^2}{12} = 60 \text{ kNm} = 6000 \text{ daNm}.$$

Schema de iterare este dată în figura 13.36, iar diagrama finală în figura 13.35.

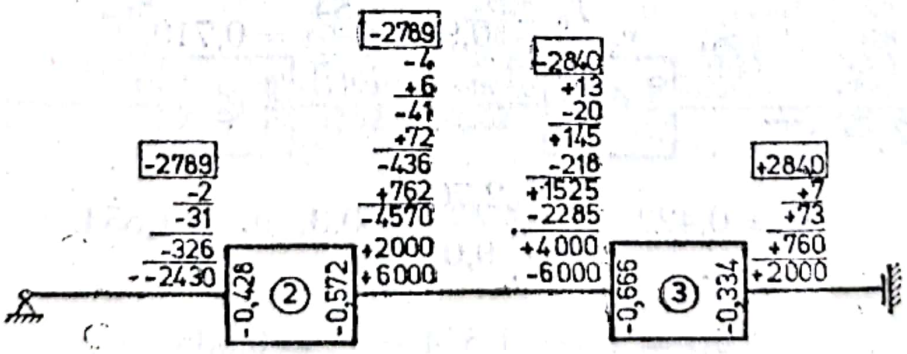


Fig. 13.36

Scanned with OKEN Scanner

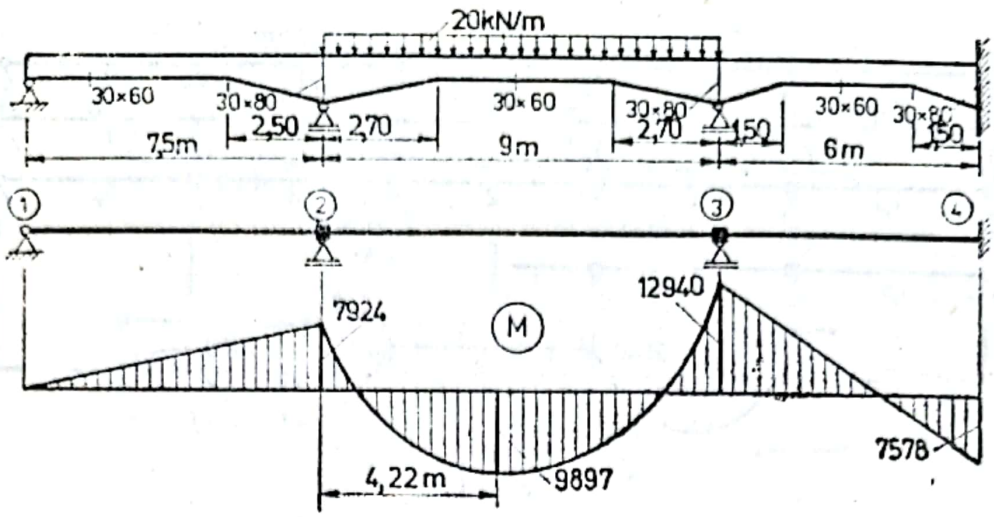


Fig. 13.37

Problema 13.14. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la grinda continuă cu secțiune variabilă din figura 13.37, utilizînd metoda Cross.

Calculul momentelor de inerție:

$$- \text{ în câmp } I_0 = \frac{3 \cdot 6^3}{12} = 54 \text{ dm}^4,$$

$$- \text{ pe reazem } I_r = \frac{3 \cdot 8^3}{12} = 128 \text{ dm}^4.$$

Calculul coeficienților de rigiditate ai barelor:

Bara 1 — 2

$$n = \frac{I_0}{I_r} = \frac{54}{128} = 0{,}422, \quad \lambda = \frac{2{,}50}{7{,}50} = 0{,}333, \quad v_3 = 0{,}985,$$

$$\rho_{21} = v_3 \frac{I_0}{l_{12}} = 0{,}985 \cdot \frac{54}{75} = 0{,}710.$$

Bara 2 — 3

$$n = 0{,}422, \quad \lambda = \frac{2{,}70}{9{,}0} = 0{,}3, \quad v_1 = 1{,}554,$$

$$\rho_{23} = \rho_{32} = 1{,}554 \cdot \frac{54}{90} = 0{,}935.$$

Scanned with OKEN Scanner

Bara 3 — 4

$$n = 0{,}422, \quad \lambda = \frac{1{,}5}{6{,}0} = 0{,}250, \quad v_4 = 1{,}462,$$

$$\rho_{34} = \rho_{43} = 1{,}462 \cdot \frac{54}{60} = 1{,}315.$$

Coeficienții de distribuție:

Nodul 2

$$\mu_{21} = -\frac{0{,}710}{1{,}645} = -0{,}432, \quad \mu_{23} = -\frac{0{,}935}{1{,}645} = -0{,}568.$$

Nodul 3

$$\mu_{32} = -\frac{0{,}935}{2{,}397} = -0{,}390, \quad \mu_{34} = -\frac{1{,}462}{2{,}397} = -0{,}610.$$

Coeficienții de transmitere a momentelor încovoietoare:

$$t_{21} = 0, \; t_{23} = t_{32} = 0{,}592, \; t_{43} = 0{,}586.$$

Momentele încovoietoare de încastrare perfectă:

$$\mathfrak{M}_{23} = -\mathfrak{M}_{32} = w_7 pl^2 = 0{,}093 \cdot 20 \cdot 81 = 150{,}50 \text{ kNm} = 15050 \text{ daNm}.$$

Schema de iterare este prezentată în figura 13.38, iar diagrama finală în figura 13.37.

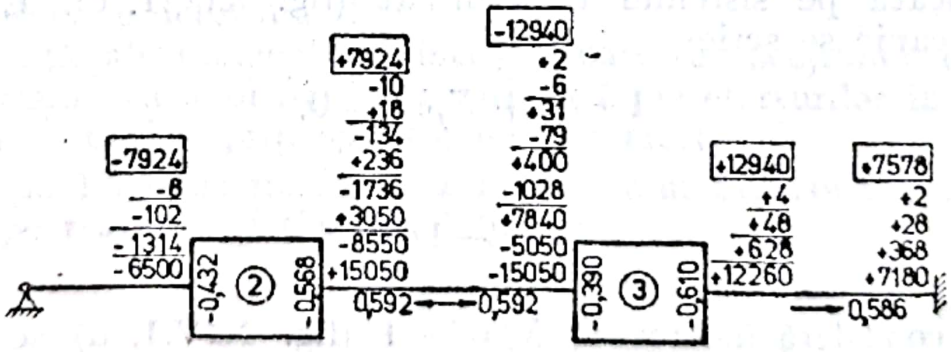


Fig. 13.38

Capitolul XIV

LINII DE INFLUENȚĂ LA STRUCTURI STATIC NEDETERMINATE

Pentru determinarea liniilor de influență ale eforturilor la structuri static nedeterminate se pot utiliza cele două metode generale. Problema poate fi rezolvată însă și folosind teorema reciprocității lucrului mecanic (Betti). Această cale prezintă avantajul că permite stabilirea, de la început, a semnificației concrete a liniilor de influență, motiv pentru care va fi utilizată în cele ce urmează.

Teorema lui Betti se referă la lucrul mecanic al forțelor exterioare ce acționează asupra unei structuri și ca atare efortul a cărui linie de influență se calculează, trebuie exteriorizat. Astfel, structura de n ori static nedeterminată, încărcată cu forța mobilă $P = 1$ (fig. XIV. 1, a), se transformă în structură de $n - 1$ ori static nedeterminată și este încărcată cu forța $P = 1$ și efortul exteriorizat X_j (fig. XIV.1, b). Pentru aplicarea teoremei lui Betti trebuie considerată și o a doua situație de încărcare, aceasta fiind încărcarea cu necunoscuta — unitate aplicată pe sistemul transformat (fig. XIV.1, c). Ecuația de lucru mecanic se scrie

$$1 \cdot \delta_{ij} + X_j \delta_{jj} = 0, \qquad \text{(XIV.1)}$$

deci

$$X_j = -1 \frac{\delta_{ij}}{\delta_{jj}}. \qquad \text{(XIV.2)}$$

Dacă se consideră încărcarea $X_j = -1$ (fig. XIV.1, d) se obține

$$X_j = 1 \frac{\delta^*_{ij}}{\delta^*_{jj}}, \qquad \text{(XIV.3)}$$

care reprezintă *ecuația generală a liniilor de influență* pentru cantități static nedeterminate.

Scanned with OKEN Scanner

Din interpretarea ecuației (XIV.3) rezultă:

— Configurația liniei de influență este dată de diagrama deplasărilor liniei de încărcare a sistemului transformat, după direcția forței mobile $P = 1$, din încărcarea acestuia cu $X_j = -1$ (δ^*_{jj} este o constantă pozitivă).

— Ordonatele liniei de influență se obțin multiplicînd diagrama de deplasări cu $\frac{1}{\delta^*_{jj}}$, δ^*_{jj} reprezentînd deplasarea după direcția forței X_j, din încărcarea cu $X_j = -1$.

— Semnele liniei de influență se stabilesc interpretînd relația obținută ca o ecuație de lucru mecanic (lucrul mecanic efectuat de forța $P = 1$ parcurgînd deplasarea δ^*_{ij}).

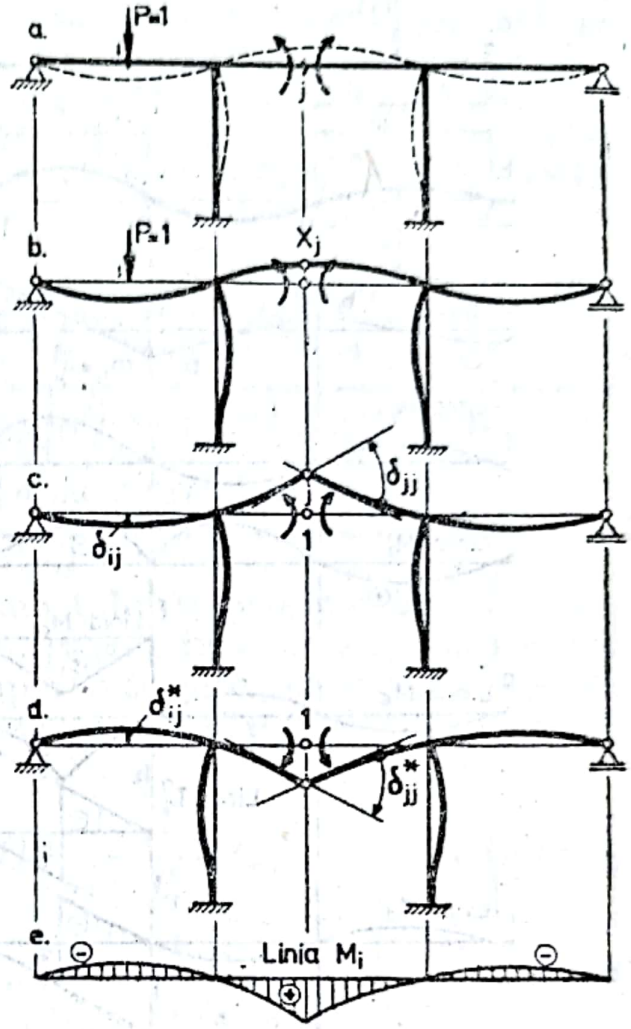


Fig. XIV.1

A. GRINZI CONTINUE

În cazul grinzii continue este avantajos să se determine liniile de influență ale momentelor încovoietoare din secțiunile de pe reazeme, urmînd ca apoi liniile de influență ale eforturilor în orice secțiune să se obțină prin suprapunere de efecte.

Ecuația liniei de influență a momentului încovoietor din secțiunea de pe reazemul j (fig. XIV.2) este

$$M_j = 1\,\frac{v^*_{hj}}{\theta^*_{jj}}\,. \qquad \text{(XIV.4)}$$

— Grinda continuă are deschideri cu secțiune constantă

Evaluînd expresiile deplasărilor v^*_{hj} și θ^*_{jj} se obțin ecuațiile celor două ramuri ale liniei de influență. Dacă se consideră o deschidere oarecare $a - b$ a grinzii, rezultă:

Scanned with OKEN Scanner

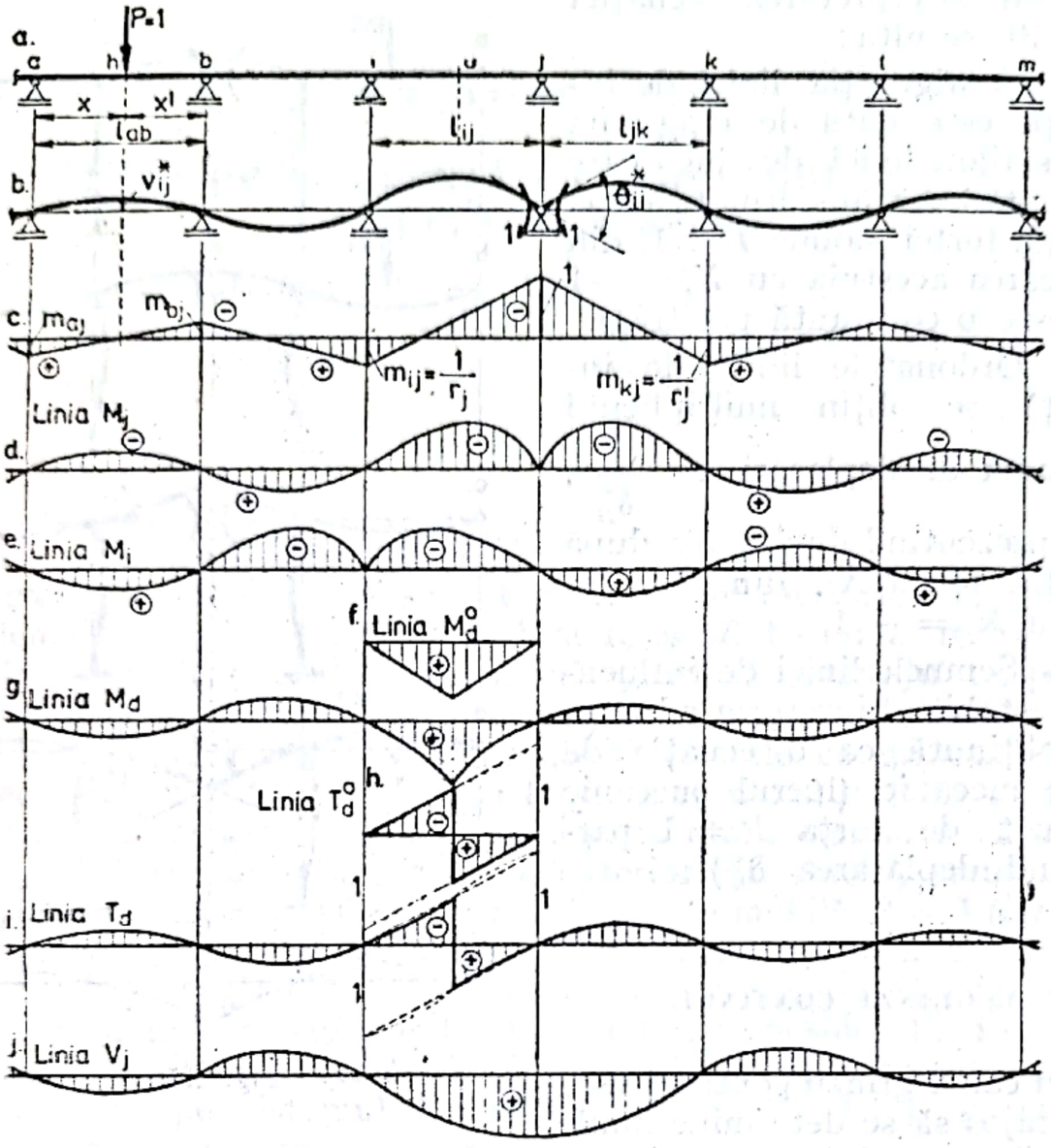


Fig. XIV.2

- ramura stîngă

$$M_j = l_{ab}\frac{\lambda_{ab}}{\lambda_{ij}}\frac{r_j}{r_j r_i' - 1}(m_{aj}\ \omega^{st} + m_{bj}\omega^{dr}) \qquad \text{(XIV.5)}$$

- ramura dreaptă

$$M_j = l_{ab}\frac{\lambda_{ab}}{\lambda_{jk}}\frac{r_j'}{r_k r_j' - 1}(m_{aj}\omega^{st} + m_{bj}\omega^{dr}), \qquad \text{(XIV.6)}$$

unde $\omega^{st} = \xi\xi'(1+\xi')$ și $\omega^{dr} = \xi\xi'(1+\xi)$, iar $\xi = \frac{x}{l_{ab}}$ și $\xi' = \frac{x'}{l_{ab}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Rapoartele ξ și ξ' precizează poziția forței $P = 1$ pe deschiderea oarecare $a - b$ și sînt variabile. Ca urmare ω^{st} și ω^{dr} reprezintă parabole cubice. Valorile coeficienților ω^{st} și ω^{dr} se iau din tabelul (XIV.1). Momentele încovoietoare m_{aj} și m_{bj} din dreptul reazemelor a și b, ce apar din cauza încărcării cu $M_j = -1$, se consideră pozitive. Rapoartele de puncte fixe se calculează cu relațiile (XI.5) și (XI.17).

Tabelul XIV.1

ξ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ω^{st}	0	0,171	0,288	0,357	0,348	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099	0
ω^{dr}	0	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171	0

Pentru linia de influență a momentului încovoietor din secțiunea de pe primul sau de pe ultimul reazem intermediar, dacă extremitățile grinzii continue sînt simplu rezemate ($r_1 = \infty$, $r_{n-1} = \infty$), rezultă, cînd forța $P = 1$ acționează în prima respectiv ultima deschidere:

$$(0 - 1) \qquad M_1 = -\frac{l_{01}}{r'_0}\omega^{dr}, \tag{XIV.7}$$

$$(n - 1, n) \qquad M_{n-1} = -\frac{l_{n-1,n}}{r_n}\omega^{st}. \tag{XIV.8}$$

— *Grinda continuă are deschideri cu secțiune variabilă.*

Ecuațiile celor două ramuri ale liniei de influență sînt:

- ramura stîngă

$$M_j = \frac{l_{ab}}{c_{ij}}\frac{\lambda_{ab}}{\lambda_{ij}}\frac{r_j}{r_j r'_i - 1}(m_{aj}\alpha^{st} + m_{bj}\alpha^{dr}), \tag{XIV.9}$$

- ramura dreaptă

$$M_j = \frac{l_{ab}}{c_{jk}}\frac{\lambda_{ab}}{\lambda_{jk}}\frac{r'_j}{r_k r'_j - 1}(m_{aj}\alpha^{st} + m_{bj}\alpha^{dr}). \tag{XIV.10}$$

Coeficienții α^{st} și α^{dr} corespund diferitelor secțiuni ale deschiderii $a - b$ în care calcă forța $P = 1$ și se iau din tabele (anexa 2). Ei sînt notați cu α_3 și α_4 în cazul barei cu o vută (tabelul 2.3) și

Scanned with OKEN Scanner

cu α_5 și α_6 în cazul barei cu două vute simetrice (tabelul 2.5). Rapoartele de puncte fixe se calculează folosind relațiile:

$$r_j = \frac{1}{c_{ij}}\left[2c'_{ij} + \frac{\lambda_{hi}}{\lambda_{ij}}\left(2c''_{hi} - \frac{c_{hi}}{r_i}\right)\right], \qquad \text{(XIV.11)}$$

$$r'_k = \frac{1}{c_{kl}}\left[2c''_{kl} + \frac{\lambda_{lm}}{\lambda_{kl}}\left(2c'_{lm} - \frac{c_{lm}}{r'_i}\right)\right], \qquad \text{(XIV.12)}$$

unde c', c, c'' sînt coeficienții de secțiune variabilă.

Dacă grinda continuă este încastrată perfect la cele două extremități 0 și n, rapoartele r_1 și r'_{n-1} se calculează cu:

$$r_1 = \frac{2c'_{01}}{c_{01}}, \qquad \text{(XIV.13)}$$

$$r'_{n-1} = \frac{2c''_{n-1,\,n}}{c_{n-1,\,n}}. \qquad \text{(XIV.14)}$$

Pentru linia de influență a momentului încovoietor din secțiunea de pe primul sau de pe ultimul reazem intermediar, dacă extremitățile grinzii continue sînt simplu rezemate, rezultă, cînd forța $P = 1$ acționează în prima respectiv ultima deschidere:

$$(0-1) \qquad M_1 = -\frac{l_{01}}{c_{01}}\frac{\alpha^{dr}}{r'_0}, \qquad \text{(XIV.15)}$$

$$(n-1,\,n) \qquad M_{n-1} = -\frac{l_{n-1,\,n}}{c_{n-1,\,n}}\frac{\alpha^{st}}{r_n}. \qquad \text{(XIV.16)}$$

Observații. Momentele încovoietoare de pe reazeme, din încărcarea cu $M_j = -1$, se determină ușor folosind procedeul punctelor fixe.

Momentele încovoietoare scad foarte repede de la un reazem la altul, deoarece de fiecare dată apare la numitor un nou raport de punct fix. Deci mărimile ordonatelor liniei de influență scad foarte repede pe măsură ce ne îndepărtăm de reazemul considerat.

Liniile de influență se calculează prin puncte, împărțind, în mod obișnuit, fiecare deschidere în 10 părți.

Cunoscînd liniile de influență ale momentelor încovoietoare din secțiunile de pe reazeme, se pot determina liniile de influență ale

Scanned with OKEN Scanner

eforturilor în orice secțiune a grinzii (fig. XIV.2, g, i, j), cu relațiile cunoscute:

$$M_d = M_d^0 + M_i \xi_d' + M_j \xi_d, \tag{XIV.17}$$

$$T_d = T_d^0 + \frac{M_j - M_i}{l_{ij}}, \tag{XIV.18}$$

$$V_j = T_j^{dr} - T_j^{st}, \tag{XIV.19}$$

unde M_d^0 și T_d^0 sînt liniile de influență ale eforturilor M și T, în secțiunea d a grinzii simplu rezemate $i - j$.

APLICAȚII

Problema 14.1. Să se determine liniile de influență M_k, T_k și V_2 la grinda continuă cu secțiune constantă, din figura 14.1,a.

Pentru calcul se folosesc relațiile (XIV.17), (XIV.18) și (XIV.19) care devin

$$M_k = M_k^0 + M_1 \xi_k' + M_2 \xi_k = M_k^0 + 0{,}6M_1 + 0{,}4M_2,$$

$$T_k = T_k^0 + \frac{M_2 - M_1}{l_{12}} = T_k^0 + \frac{M_2 - M_1}{7},$$

$$V_2 = T_2^{dr} - T_2^{st}.$$

Se determină mai întîi liniile de influență ale momentelor încovoietoare M_1 și M_2.

Grinda fiind cu moment de inerție constant, pentru toate deschiderile $\lambda_{ij} = l_{ij}$.

Rapoartele de puncte fixe sînt:

$$r_1 = \infty = r_3'$$

$$r_2 = 2 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{12}}\left(2 - \frac{1}{r_1}\right) = 3{,}43 = r_2'$$

$$r_3 = 2 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}}\left(2 - \frac{1}{r_2}\right) = 3{,}71 = r_1'$$

$$r_4 = 2 + \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{34}}\left(2 - \frac{1}{r_3}\right) = 4{,}42 = r_0'.$$

Scanned with OKEN Scanner

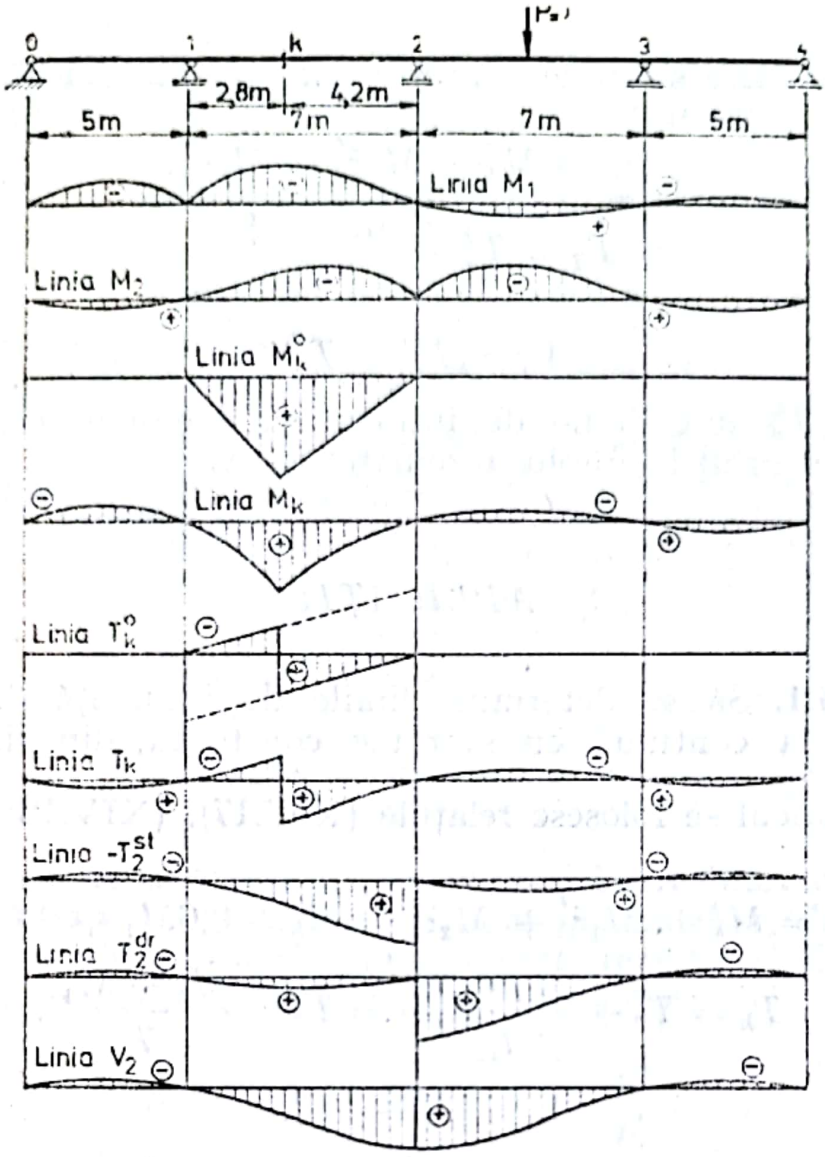


Fig. 14.1

Linia de influență M_1

- Deschiderea $0 - 1$

$$M_1 = -\frac{l_{01}}{r'_0}\omega^{dr} = -\frac{5}{4{,}42}\omega^{dr} = -1{,}131\omega^{dr}.$$

- Deschiderea $1 - 2$

$$M_1 = l_{12}\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12}}\frac{r'_1}{r_2 r'_1 - 1}(m_{11}\omega^{st} + m_{21}\omega^{dr}) =$$

$$= 7 \cdot \frac{3{,}71}{3{,}43 \cdot 3{,}71 - 1}(-\omega^{st} + 0{,}269\omega^{dr}) = -2{,}215(\omega^{st} - 0{,}269\omega^{dr}).$$

Scanned with OKEN Scanner

- Deschiderea 2 — 3

$$M_1 = l_{23}\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{12}}\frac{r_1'}{r_2r_1'-1}(m_{21}\omega^{st}+m_{31}\omega^{dr}) =$$

$$= 7\cdot\frac{7}{7}\cdot\frac{3{,}71}{3{,}43\cdot 3{,}71-1}(0{,}269\omega^{st}-0{,}0784\omega^{dr}) =$$

$$= 7{,}6(3{,}43\omega^{st}-\omega^{dr}).$$

- Deschiderea 3 — 4

$$M_1 = l_{34}\frac{\lambda_{34}}{\lambda_{12}}\frac{r_1'}{r_2r_1'-1}m_{31}\omega^{st} =$$

$$= 5\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{3{,}71}{3{,}43\cdot 3{,}71-1}(0{,}0784\omega^{st}) = -0{,}0886\omega^{st}.$$

Linia de influență M_2. Din motive de simetrie se face calculul numai pentru deschiderile 0 — 1 și 1 — 2.

- Deschiderea 0 — 1

$$M_2 = l_{01}\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{12}}\frac{r_2}{r_2r_1'-1}m_{12}\omega^{dr} =$$

$$= 5\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{3{,}43}{3{,}43\cdot 3{,}71-1}\cdot 0{,}291\omega^{dr} = 0{,}3041\omega^{dr}.$$

- Deschiderea 1 — 2

$$M_2 = l_{12}\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12}}\frac{r_2}{r_2r_1'-1}(m_{12}\omega^{st}+m_{22}\omega^{dr}) =$$

$$= 7\cdot\frac{3{,}43}{3{,}43\cdot 3{,}71-1}(0{,}291\omega^{st}-\omega^{dr}) = 2{,}048(0{,}291\omega^{st}-\omega^{dr}).$$

Valorile ordonatelor liniilor de influență cerute sînt cuprinse în tabelul 14.1, iar configurațiile lor se dau în figura 14.1.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 14.1

Desc.	ξ	M_1	M_2	M_k^0	M_k	T_k^0	T_k	$-T_2^{st}$	T_2^{dr}	V_2
1	0	0	0		0		0	0	0	0
	0,2	− 0,2171	0,0584		− 0,1069		0,0394	− 0,0394	− 0,0108	− 0,0502
	0,4	− 0,3801	0,1022		− 0,1872		0,0689	− 0,0689	− 0,0188	− 0,0877
	0,6	− 0,4342	0,1168		− 0,2138		0,0787	− 0,0787	− 0,0215	− 0,1002
	0,8	− 0,3258	0,0876		− 0,1604		0,0591	− 0,0591	− 0,0162	− 0,0753
—	1 / 0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,2	− 0,5235	− 0,2216	0,84	0,4372	− 0,2	− 0,1569	0,1569	0,0409	0,1978
	0,4	− 0,6505	− 0,4594	1,68	1,1060	− 0,4 0,6	− 0,3727 0,6273	0,3727	0,0847	0,4574
	0,6	− 0,5155	− 0,5865	1,12	0,5760	0,4	0,3899	0,6101	0,1081	0,7182
	0.8	− 0,2537	− 0,4755	0,56	0,2176	0,2	0,1683	0,8317	0,0877	0,9194
—	1 / 0	0	0	0	0	0	0	1 0	0 1	0
3	0,2	0,1382	− 0,4755		− 0,1072		− 0,0877	0,0877	0,8317	0,9194
	0,4	0,1704	− 0,5865		− 0,1325		− 0,1081	0,1081	0,6101	0,7182
	0,6	0,1335	− 0,4594		− 0,1036		− 0,0847	0,0847	0,3727	0,4574
	0,8	0,0644	− 0,2216		− 0,0500		− 0,0409	0,0409	0,1569	0,1978
—	1 / 0	0	0	0	0		0	0	0	0
4	0,2	− 0,0255	0,0876		0,0197		0,0162	− 0,0162	− 0,0591	− 0,0753
	0,4	− 0,0340	0,1168		0,0263		0,0215	− 0,0215	− 0,0787	0,1002
	0,6	− 0,0297	0,1022		0,0230		0,0188	− 0,0188	− 0,0689	− 0,0877
	0,8	− 0,0170	0,0584		0,0131		0,0108	− 0,0108	− 0,0394	− 0,0502
	1,0	0	0		0		0	0	0	0

Scanned with OKEN Scanner

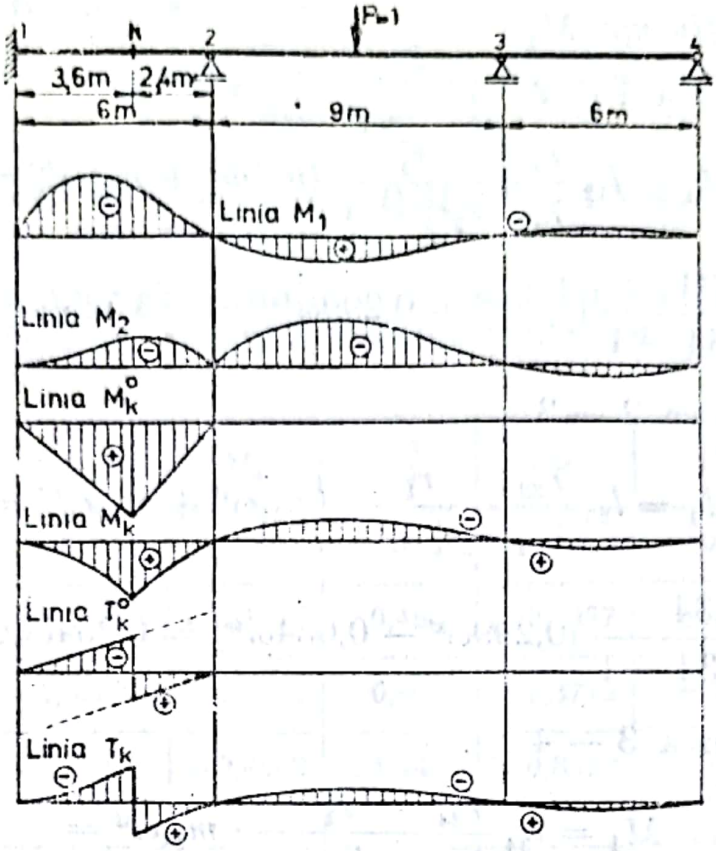


Fig. 14.2

Problema 14.2. La grinda continuă din figura 14.2, să se determine liniile de influență M_k și T_k.

Relațiile de calcul sînt:

$$M_k = M_k^0 + 0{,}4M_1 + 0{,}6M_2,$$

$$T_k = T_k^0 + \frac{M_2 - M_1}{6}.$$

Lungimile transformate ale deschiderilor au valorile:

$$\lambda_{12} = \lambda_{34} = 6 \text{ m}, \quad \lambda_{23} = 4{,}5 \text{ m},$$

iar rapoartele de puncte fixe rezultă:

$$r_2 = 2, \quad r_3 = 4,$$

$$r_3' = \infty, \quad r_2' = 4{,}67, \quad r_1' = 3{,}34.$$

Scanned with OKEN Scanner

Linia de influență M_1

- Deschiderea 1 — 2

$$M_1 = l_{12}\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12}}\frac{r_1'}{r_2r_1'-1}(m_{11}\omega^{st}+m_{21}\omega^{dr})=$$

$$=6\frac{3{,}34}{2\cdot 3{,}34-1}(-\omega^{st}+0{,}299\omega^{dr})=-3{,}528(\omega^{st}-0{,}299\omega^{dr}).$$

- Deschiderea 2 — 3

$$M_1 = l_{23}\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{12}}\frac{r_1'}{r_2r_1'-1}(m_{21}\omega^{st}+m_{31}\omega^{dr})=$$

$$=9\frac{4{,}5}{6}\frac{3{,}34}{2\cdot 3{,}34-1}(0{,}299\omega^{st}-0{,}064\omega^{dr})=0{,}254(4{,}67\omega^{st}-\omega^{dr}).$$

- Deschiderea 3 — 4

$$M_1 = l_{34}\frac{\lambda_{34}}{\lambda_{12}}\frac{r_1'}{r_2r_1'-1}\cdot m_{31}\omega^{st}=$$

$$=6\frac{6}{6}\frac{3{,}34}{2\cdot 3{,}34-1}(-0{,}064\omega^{st})=-0{,}2256\omega^{st}.$$

Linia de influență M_2

- Deschiderea 1 — 2

$$M_2 = l_{12}\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12}}\frac{r_2}{r_2r_1'-1}(m_{12}\omega_{st}+m_{22}\omega^{dr})=$$

$$=6\frac{2}{2\cdot 3{,}34-1}(0{,}5\omega^{st}-\omega^{dr})=-2{,}112(\omega^{dr}-0{,}5\omega^{st}).$$

- Deschiderea 2 — 3

$$M_2 = l_{23}\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{23}}\frac{r_2'}{r_3r_2'-1}(m_{22}\omega^{st}+m_{32}\omega^{dr})=$$

$$=9\frac{4{,}67}{4\cdot 4{,}67-1}(-\omega^{st}+0{,}214\omega^{dr})=-2{,}376(\omega^{st}-0{,}214\omega^{dr}).$$

Scanned with OKEN Scanner

● Deschiderea 3 — 4

$$M_2 = l_{34}\frac{\lambda_{34}}{\lambda_{23}}\frac{r_2'}{r_3 r_2' - 1} m_{32}\omega^{st} =$$

$$= 6\frac{6}{4{,}5}\frac{4{,}67}{4 \cdot 4{,}67 - 1} 0{,}214\omega^{st} = 4{,}524\omega^{st}.$$

În tabelul 14.2 se dau mărimile ordonatelor liniilor de influenţă, iar în figura 14.2 se prezintă configuraţiile lor.

Tabelul 14.2

Desc.	ξ	M_1	M_2	M_k^0	M_k	T_k^0	T_k
1	0	0	0	0	0	0	0
	0,2	−0,8136	−0,1014	0,48	0,0937	−0,2	−0,0813
	0,4	−1,0002	−0,3041	0,96	0,3775	−0,4	−0,2840
	0,6	−0,7806	−0,4562	1,44	0,8538	−0,6	−0,5459
						0,4	0,4541
	0,8	−0,3736	−0,4055	0,72	0,3272	0,2	0,1947
	1 / 0	0	0	0	0	0	0
2	0,2	0,2926	−0,5867		−0,2350		−0,1465
	0,4	0,3698	−0,7416		−0,2970		−0,1852
	0,6	0,3008	−0,6030		−0,2415		−0,1506
	0,8	0,1545	−0,3097		−0,1240		−0,0774
	1 / 0	0	0		0		0
3	0,2	−0,0650	0,1303		0,0521		0,0325
	0,4	−0,0866	0,1737		0,0694		0,0434
	0,6	−0,0758	0,1520		0,0609		0,0380
	0,8	−0,0433	0,0864		0,0348		0,0217
	1	0	0		0		0

Scanned with OKEN Scanner

Problema 14.3. Se cer liniile de influenţă M_k, T_k şi V_2 la grinda continuă cu secţiune variabilă din figura 14.3, avînd acelaşi moment de inerţie I_0 în toate deschiderile şi $n = \frac{I_0}{I_{max}} = 0{,}20$ pe toate reazemele intermediare.

Din anexa 2 au fost extrase valorile coeficienţilor α^{st} şi α^{dr}, corespunzătoare punctelor în dreptul cărora se calculează ordonatele liniilor de influenţă (fig. 14.3, b).

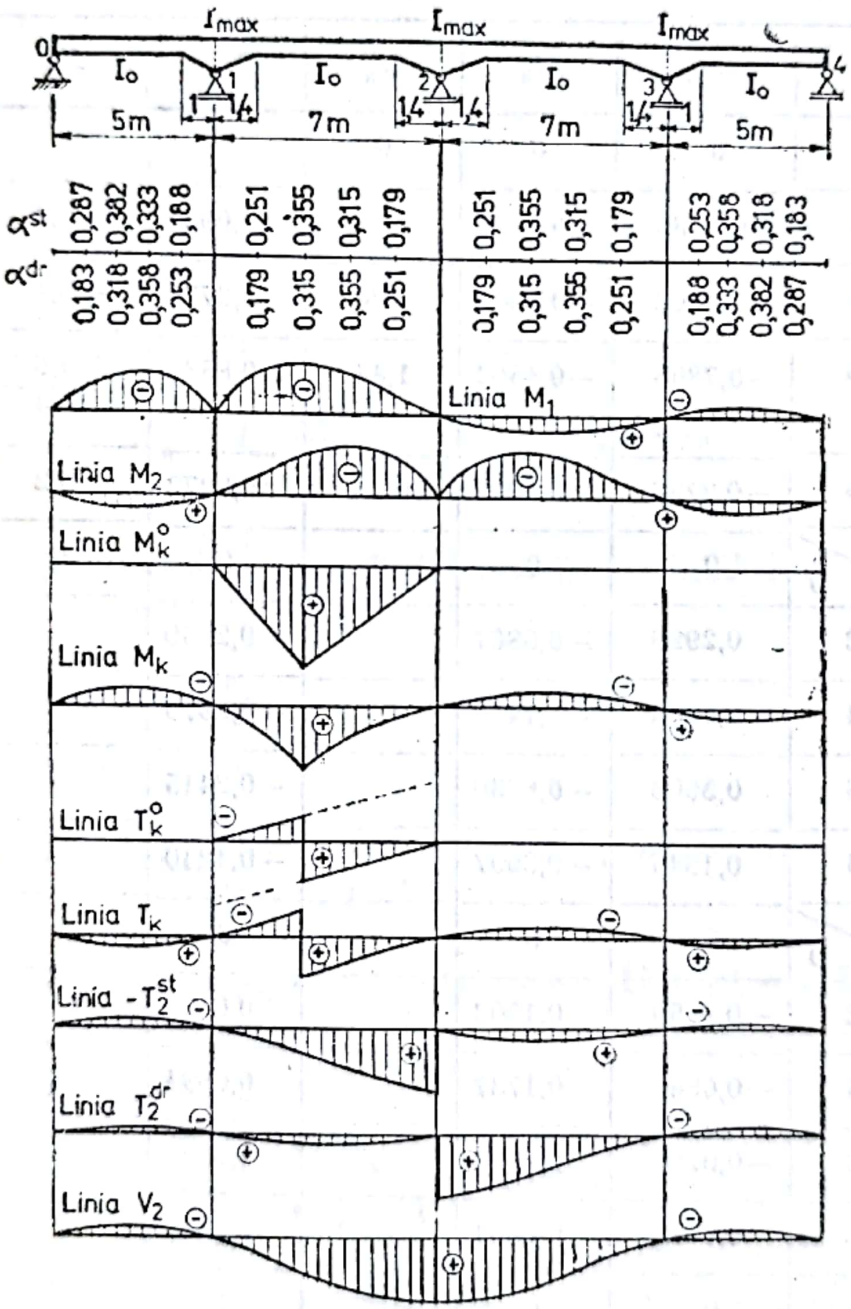


Fig. 14.3

Scanned with OKEN Scanner

Pentru toate deschiderile $\lambda_{ij} = l_{ij}$.
Coeficienţii de secţiune variabilă sînt:

$$c'_{01} = 0{,}997,\ c_{01} = 0{,}956,\ c''_{01} = 0{,}725,$$
$$c'_{12} = c''_{12} = c'_{23} = c''_{23} = 0{,}722,\ c_{12} = c_{23} = 0{,}911,$$
$$c'_{34} = 0{,}725,\ c_{34} = 0{,}956,\ c''_{34} = 0{,}997.$$

Rapoartele de puncte fixe se calculează cu relaţiile (XIV.11) şi (XIV.12), rezultînd:

$$r_1 = \infty = -r'_3$$

$$r_2 = \frac{1}{c_{12}}\left[2c'_{12} + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{12}}\left(2c''_{01} - \frac{c_{01}}{r_1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{0{,}911}\left(2 \cdot 0{,}722 + \frac{5}{7} \cdot 2 \cdot 0{,}725\right) = 2{,}72 = r'_2$$

$$r_3 = \frac{1}{c_{23}}\left[2c'_{23} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}}\left(2c''_{12} - \frac{c_{12}}{r_2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{0{,}911}\left[2 \cdot 0{,}722 + \frac{7}{7}\left(2 \cdot 0{,}722 - \frac{0{,}911}{2{,}72}\right)\right] = 2{,}8 = r'_1$$

$$r_4 = \frac{1}{c_{34}}\left[2c'_{34} + \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{34}}\left(2c''_{23} - \frac{c_2}{r_3}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{0{,}956}\left[2 \cdot 0{,}725 + \frac{7}{5}\left(2 \cdot 0{,}722 - \frac{0{,}911}{2{,}8}\right)\right] = 3{,}15 = r'_0$$

Linia de influenţă M_1

- Deschiderea $0 - 1$

$$M_1 = -\frac{l_{01}}{c_{01}}\frac{\alpha^{dr}}{r'_0} = -\frac{5}{0{,}956} \cdot \frac{\alpha^{dr}}{3{,}15} = -1{,}66\alpha^{dr}.$$

- Deschiderea $1 - 2$

$$M_1 = \frac{l_{12}}{c_{12}}\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12}}\frac{r'_1}{r_2 r'_1 - 1}(m_{11}\alpha^{st} + m_{21}\alpha^{dr}) =$$

$$= \frac{7}{0{,}911} \cdot \frac{2{,}8}{2{,}72 \cdot 2{,}8 - 1}(-\alpha^{st} + 0{,}357\alpha^{dr}) = -1{,}16(2{,}8\alpha^{st} - \alpha^{dr}).$$

Scanned with OKEN Scanner

- Deschiderea 2 — 3

$$M_1 = \frac{l_{23}}{c_{23}} \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{12}} \frac{r_1'}{r_2 r_1' - 1} (m_{21}\alpha^{st} + m_{31}\alpha^{dr}) =$$

$$= \frac{7}{0{,}911} \frac{7}{7} \frac{2{,}8}{2{,}72 \cdot 2{,}8 - 1} (0{,}357\alpha^{st} - 0{,}1313\alpha^{dr}) =$$

$$= 0{,}4265(2{,}72\alpha^{st} - \alpha^{dr}).$$

- Deschiderea 3 — 4

$$M_1 = \frac{l_{34}}{c_{34}} \frac{\lambda_{34}}{\lambda_{12}} \frac{r_1'}{r_2 r_1' - 1} m_{31}\alpha^{st} =$$

$$= \frac{5}{0{,}956} \frac{5}{7} \frac{2{,}8}{2{,}72 \cdot 2{,}8 - 1} (-0{,}1313\alpha^{st}) = -0{,}218\alpha^{st}.$$

Linia de influență M_2. Grinda este simetrică, deci se efectuează calculul numai pentru deschiderile 0 — 1 și 1 — 2.

- Deschiderea 0 — 1

$$M_2 = \frac{l_{01}}{c_{12}} \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{12}} \frac{r_2}{r_2 r_1' - 1} m_{12}\alpha^{dr} =$$

$$= \frac{5}{0{,}911} \frac{5}{7} \frac{2{,}72}{2{,}72 \cdot 2{,}8 - 1} 0{,}368\alpha^{dr} = 0{,}593\alpha^{dr}.$$

- Deschiderea 1 — 2

$$M_2 = \frac{l_{12}}{c_{12}} \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12}} \frac{r_2}{r_2 r_1' - 1} (m_{12}\alpha^{st} + m_{22}\alpha^{dr}) =$$

$$= \frac{7}{0{,}911} \frac{2{,}72}{2{,}72 \cdot 2{,}8 - 1} (0{,}368\alpha^{st} - \alpha^{dr}) = -1{,}161(2{,}72\alpha^{dr} - \alpha^{st}).$$

Relațiile pentru calculul liniilor de influență M_k, T_k și V_2, sînt:

$$M_k = M_k^0 + 0{,}6M_1 + 0{,}4M_2,$$

$$T_k = T_k^0 + \frac{M_2 - M_1}{7},$$

$$V_2 = T_2^{dr} - T_2^{st}.$$

Tabelul (14.3) conține valorile ordonatelor liniilor de influență, iar configurațiile lor se dau în figura 14.3.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 14.3

Desc.	ξ	M_1	M_2	M_k^0	M_k	T_k^0	T_k	$-T_2^{st}$	T_2^{dr}	V_2
1	0	0	0		0		0	0	0	0
	0,2	− 0,3038	− 0,1085		− 0,1389		0,0589	− 0,0589	− 0,0212	− 0,0801
	0,4	− 0,5280	− 0,1885		− 0,2416		0,1024	− 0,1024	− 0,0368	− 0,1392
	0,6	− 0,5945	0,2123		− 0,2718		0,1153	− 0,1153	− 0,0415	− 0,1568
	0,8	− 0,4200	0,1500		− 0,1920		0,0814	− 0,0814	− 0,0293	− 0,1107
—	1 / 0	0	0		0	0	0	0	0	0
2	0,2	− 0,6075	− 0,2736	0,84	0,3660	− 0,2	− 0,1523	0,1523	0,0535	0,2058
	0,4	− 0,7875	− 0,5820	1,68	0,9745	− 0,4	− 0,3706	0,3706	0,1137	0,4843
						0,6	0,6294			
	0,6	−0,6115	− 0,7545	1,12	0,4513	0,4	0,3796	0,6204	0,1474	0,7678
	0,8	− 0,2902	− 0,5845	0,56	0,1520	0,2	0,1580	0,8420	0,1142	0,9562
—	1 / 0	0	0	0	0	0	0	1 / 0	0 / 1	1
3	0,2	0,2148	− 0,5845		− 0,1049		− 0,1142	0,1142	0,8420	0,9562
	0,4	0,2775	− 0,7545		− 0,1353		− 0,1474	0,1474	0,6204	0,7678
	0,6	0,2140	− 0,5820		− 0,1044		− 0,1137	0,1137	0,3706	0,4843
	0,8	0,1006	− 0,2736		− 0,0491		− 0,0535	0,0535	0,1523	0,2058
—	1 / 0	0	0		0		0	0	0	0
4	0,2	− 0,0551	0,1500		0,0269		0,0293	− 0,0293	− 0,0814	− 0,1107
	0,4	− 0,0780	0,2123		0,0381		0,0415	0,0415	− 0,1153	− 0,1568
	0,6	− 0,0693	0,1885		0,0338		0,0368	− 0,0368	− 0,1024	− 0,1392
	0,8	− 0,0399	0,1085		0,0191		0,0212	− 0,0212	− 0,0589	− 0,0801
	1	0	0		0		0	0	0	0

Scanned with OKEN Scanner

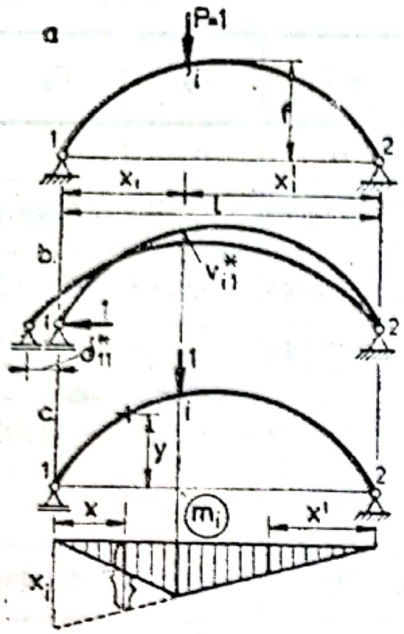


Fig. XIV.3

1. *Arcul dublu articulat.* Se tratează cazul uzual al arcului cu articulaţiile de nivel (fig. XIV.3, a). Pentru determinarea liniei de influenţă a necunoscutei static nedeterminate H, se suprimă legătura corespunzătoare acesteia obţinîndu-se sistemul transformat static determinat (fig. XIV.3, b). Ecuaţia liniei de influenţă este

$$H = \frac{v^*_{i1}}{\delta^*_{11}}, \qquad \text{(XIV.20)}$$

unde v^*_{i1} reprezintă diagrama deplasărilor pe verticală a arcului simplu rezemat, încărcat cu $H = -1$, iar δ^*_{11} este deplasarea după direcţia legăturii suprimate, din aceeaşi încărcare $H = -1$.

Relaţia (XIV.20) se scrie în continuare

$$H = \frac{\int \frac{I_0}{I} m_1 m_i \, ds}{\int \frac{I_0}{I} m_1^2 \, ds + l i_0^2} = \frac{\int \frac{I_0}{I} y m_i \, ds}{\int \frac{I_0}{I} y^2 \, ds + l i_0^2}, \qquad \text{(XIV.21)}$$

în care I_0 este momentul de inerţie de la cheie. Expresia momentului încovoietor m_i, din încărcarea cu forţa $P = 1$ aplicată în i, se obţine folosind diagrama din figura XIV.3, c. Rezultă

$$\begin{aligned} &(1 - i) \qquad m_i = \frac{x_i x'}{l} - (x_i - x), \\ &(i - 2) \qquad m_i = \frac{x_i x'}{l}, \end{aligned} \qquad \text{(XIV.22)}$$

cu care

$$H = \frac{\frac{x_i}{l} \int_1^2 \frac{I_0}{I} x' y \, ds - \int_1^i \frac{I_0}{I} (x_i - x) \, ds}{\int_1^2 \frac{I_0}{I} y^2 \, ds + l i_0^2}. \qquad \text{(XIV.23)}$$

Scanned with OKEN Scanner

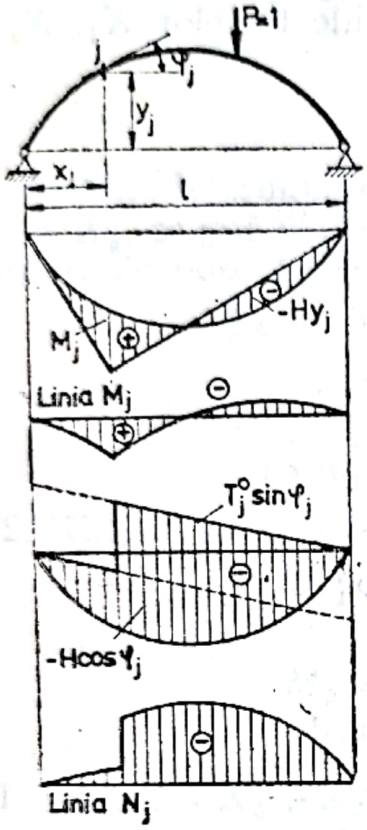


Fig. XIV.4

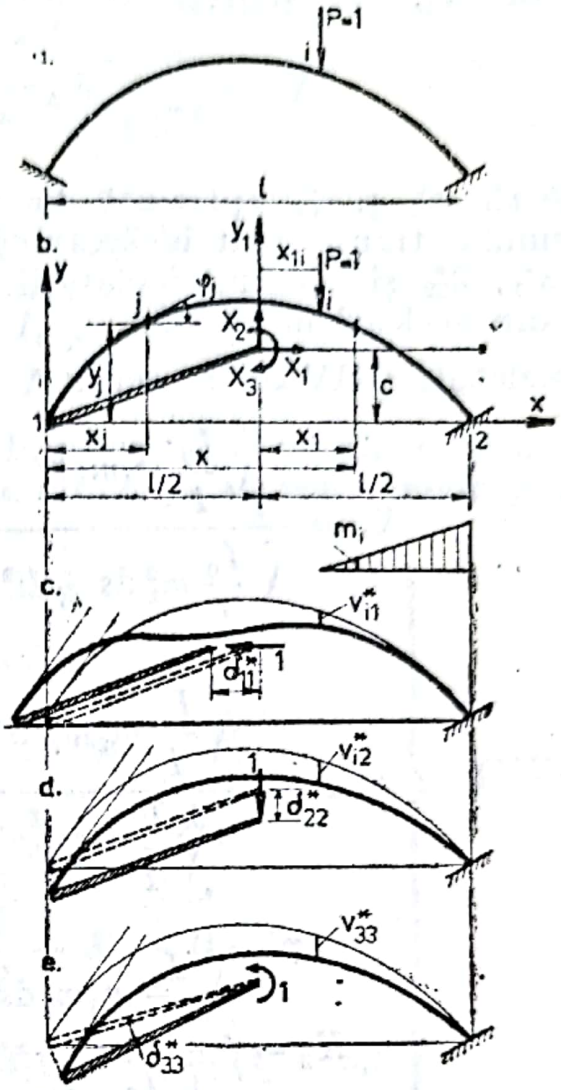


Fig. XIV.5

Liniile de influenţă ale eforturilor M şi N dintr-o secţiune j, se determină prin suprapunere de efecte, folosind relaţiile:

$$M_j = M_j^0 - Hy_j, \tag{XIV.24}$$

$$N_j = -H\cos\varphi_j - T_j^0 \sin\varphi_j, \tag{XIV.25}$$

în care M_j^0 şi T_j^0 reprezintă liniile de influenţă ale eforturilor M şi T, din secţiunea j a grinzii simplu rezemate avînd deschiderea l (fig. XIV.4).

2. *Arcul dublu încastrat.* Calculul se face folosind procedeul transferării necunoscutelor static nedeterminate în centrul elastic (fig. XIV.5, b). Se determină la început liniile de influenţă ale necunos-

Scanned with OKEN Scanner

cutelor X_1, X_2 şi X_3, care au expresiile

$$X_1 = \frac{v_{i1}^*}{\delta_{11}^*}, \quad X_2 = \frac{v_{i2}^*}{\delta_{22}^*}, \quad X_3 = \frac{v_{i3}^*}{\delta_{33}^*}, \tag{XIV.26}$$

unde v_{i1}^*, v_{i2}^* şi v_{i3}^* reprezintă diagramele deplasărilor pe verticală ale sistemului transformat încărcat cu $X_1 = -1$, $X_2 = -1$ şi $X_3 = -1$, iar δ_{11}^*, δ_{22}^* şi δ_{33}^* sînt deplasările după direcţiile forţelor X_1, X_2 şi X_3, din aceleaşi încărcări:

Relaţiile (XIV.26) se scriu:

$$X_1 = \frac{\int \frac{I_0}{I} m_1 m_i \, ds}{\int \frac{I_0}{I} m_1^2 \, ds + li_0^2} = \frac{\int \frac{I_0}{I} y_1 m_i \, ds}{\int \frac{I_0}{I} y_1^2 \, ds + li_0^2},$$

$$X_2 = \frac{\int \frac{I_0}{I} m_2 m_i \, ds}{\int \frac{I_0}{I} m_2^2 \, ds} = -\frac{\int \frac{I_0}{I} x_1 m_i \, ds}{\int \frac{I_0}{I} x_1^2 \, ds}, \tag{XIV.27}$$

$$X_3 = \frac{\int \frac{I_0}{I} m_3 m_i \, ds}{\int \frac{I_0}{I} m_3^2 \, ds} = -\frac{\int \frac{I_0}{I} m_i \, ds}{\int \frac{I_0}{I} \, ds}.$$

Expresia momentului încovoietor m_i, din încărcarea cu forţa $P = 1$ aplicată în i, este

$$m_i = -(x_1 - x_{1i}) = -(x - x_i). \tag{XIV.28}$$

De asemenea, $y_1 = y - c$ şi $x_1 = x - \frac{l}{2}$. Rezultă atunci:

$$X_1 = \frac{\int \frac{I_0}{I} (y - c)(x - x_i) \, ds}{\int \frac{I_0}{I} (y - c)^2 \, ds + li_0^2},$$

Scanned with OKEN Scanner

$$X_2 = \frac{\int \frac{I_0}{I}\left(x - \frac{l}{2}\right)(x - x_i)\,ds}{\int \frac{I_0}{I}\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 ds}, \qquad \text{(XIV.29)}$$

$$X_3 = \frac{\int \frac{I_0}{I}(x - x_i)\,ds}{\int \frac{I_0}{I}\,ds}.$$

Odată determinate liniile de influență ale necunoscutelor X_1, X_2 și X_3, se pot calcula și liniile de influență ale reacțiunilor și eforturilor. Se pot scrie expresiile:

$$\left.\begin{aligned} H &= X_1, \\ V_1 &= X_2, \\ V_2 &= 1 - X_2, \\ M_1 &= X_1 c - X_2 \frac{l}{2} + X_3, \\ M_2 &= X_1 c + X_2 \frac{l}{2} + X_3 - (l - x_i), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV.30)}$$

$$\left.\begin{aligned} (1 - j)\quad M_j &= X_3 + X_2\left(x_j - \frac{l}{2}\right) - X_1(y_j - c) - (x_j - x_i), \\ (j - 2)\quad M_j &= X_3 + X_2\left(x_j - \frac{l}{2}\right) - X_1(y_j - c), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV.31)}$$

$$\left.\begin{aligned} (1 - j)\quad N_j &= -X_1 \cos\varphi_j - (X_2 - 1)\sin\varphi_j, \\ (j - 2)\quad N_j &= -X_1 \cos\varphi_j - X_2 \sin\varphi_j, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV.32)}$$

APLICAȚII

Problema 14.4. Să se determine liniile de influență H, M_j și N_j la arcul parabolic din figura 14.4, cu secțiunea la cheie 30×70 cm², admițînd că $I = \frac{I_0}{\cos\varphi}$.

Scanned with OKEN Scanner

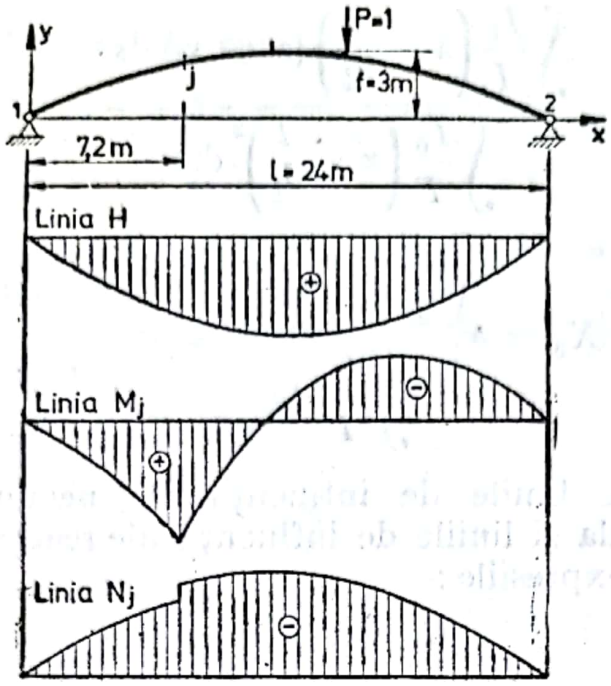


Fig. 14.4

Ecuația axei arcului este $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) = 4f\xi(1-\xi) = 12\xi(1-\xi)$.

Rezultă de asemenea $\frac{I_0}{I}\,ds = dx$.

Linia de influență H. Se folosește relația (XIV.23) și se obține:

$$\frac{x_i}{l}\int_1^2 \frac{I_0}{I}\,x'y\,ds - \int_1^i \frac{I_0}{I}\,(x_i - x)\,ds = \frac{x_i}{l}\int_0^l x'y\,dx - \int_0^{x_i}(x_i - x)dx =$$

$$= 4fl^2\xi_i\int_0^1 \xi(1-\xi)^2\,d\xi - 4fl^2\int_0^{\xi_i}\xi(1-\xi)(\xi_i - \xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{fl^2}{3}\xi_i(1 - 2\xi_i^2 + \xi_i^3) = \frac{fl^2}{3}\xi_i\xi_i'(1 + \xi_i\xi_i') = 576\,\xi_i\xi_i'\,(1 + \xi_i\xi_i').$$

$$\int_1^2 \frac{I_0}{I}\,y^2\,ds = \int_0^l y^2\,dx = 4f^2l\int_0^1 \xi^2(1-\xi)^2\,d\xi = \frac{8f^2l}{15} = 115{,}2$$

$$li_0^2 = l\frac{I_0}{A_0} = l\frac{h^2}{12} = 24\,\frac{0{,}7^2}{12} = 0{,}98.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se consideră că secțiunea i este secțiunea curentă a arcului, rezultă ecuația liniei de influență a împingerii H,

$$H = \frac{576\,\xi\,\xi'(1 + \xi\,\xi')}{115{,}2 + 0{,}98} = 4{,}958\,\xi\,\xi'(1 + \xi\,\xi')$$

Linia de influență M_j

$$M_j = M_j^0 - H y_i.$$

Pentru $x_j = 7{,}2$ m, $y_j = \frac{4 \cdot 3}{24^2} 7{,}2(24 - 7{,}2) = 2{,}52$ m și rezultă

$$M_j = M_j^0 - 2{,}52\ H.$$

Linia de influență N_j

$$N_j = -H \cos \varphi_j - T_j^0 \sin \varphi_j.$$

Se calculează $\operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{4f}{l^2}(l - 2x)$, iar pentru $x_j = 7{,}2$ m se obține $\operatorname{tg} \varphi_j = \frac{4 \cdot 3}{24^2}(24 - 2 \cdot 7{,}2) = 0{,}2$ și apoi $\sin \varphi_j = 0{,}1961$, $\cos \varphi_j = 0{,}981$.

Cu acestea

$$N_j = -0{,}981\ H - 0{,}1961\ T_j^0.$$

Rezultatele calculului au fost sistematizate în tabelul 14.4. Configurațiile liniilor de influență sînt date în figura 14.4.

Problema 14.5. La arcul parabolic din figura 14.5, avînd secțiunea la cheie 30×80 cm^2, să se calculeze liniile de influență M_1, M_j și N_j. Se admite că $I = \frac{I_0}{\cos \varphi}$.

Ecuația axei arcului este $y = \frac{1}{24} x\,(24 - x) = 24\,\xi\,(1 - \xi)$, $\frac{I_0}{I}\,ds = dx$, iar poziția centrului elastic rezultă calculînd ordonata $c = \frac{2}{3} f = 4$ m.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 14.4

ξ	H	M_j^0	$-Hy_j$	M_j	$-H\cos\varphi_j$	$-T_j^0\sin\varphi_j$	N_j
0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,4715	1,68	−1,1882	0,4918	−0,4625	0,0196	−0,4429
0,2	0,9202	3,36	−2,3189	1,0411	−0,9027	0,0392	−0,8635
0,3	1,2598	5,04	−3,1747	1,8653	−1,2359	0,0588 −0,1373	−1,1771 −1,3732
0,4	1,4755	4,32	−3,7183	0,6017	−1,4475	−0,1177	−1,5652
0,5	1,5494	3,60	−3,9045	−0,3045	−1,5200	−0,0980	−1,6180
0,6	1,4755	2,88	−3,7183	−0,8383	−1,4475	−0,0784	−1,5259
0,7	1,2598	2,16	−3,1747	−1,0147	−1,2359	−0,0588	−1,2946
0,8	0,9202	1,44	−2,3189	−0,8789	−0,9027	−0,0392	−0,9419
0,9	0,4715	0,72	−1,1882	−0,4682	−0,4625	−0,0196	−0,4821
1	0	0	0	0	0	0	0

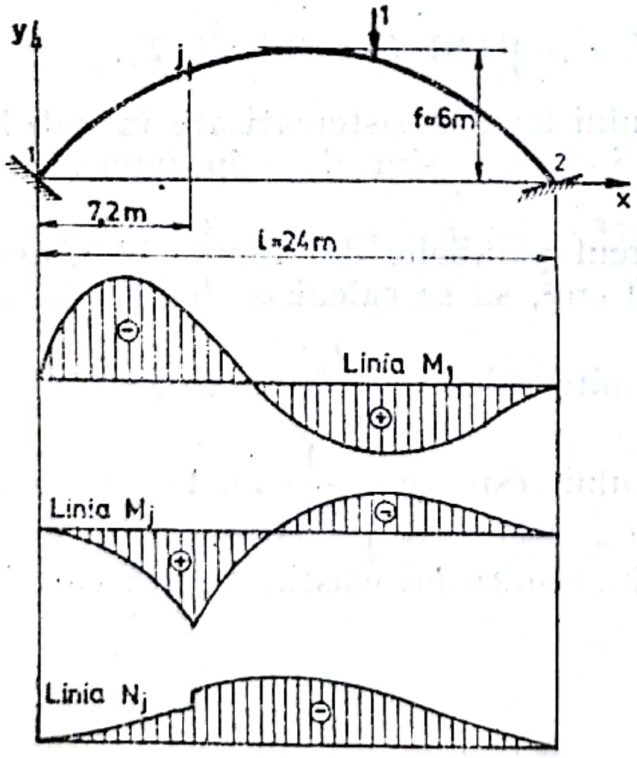


Fig. 14.5

Scanned with OKEN Scanner

Pentru determinarea liniilor de influență X_1, X_2 și X_3, se folosesc relațiile (XIV.29).

Linia de influență X_1

$$\int \frac{I_0}{I}(y-c)(x-x_i)\,ds = \int_{x_i}^{l}\left(y-\frac{2f}{3}\right)(x-x_i)\,dx =$$

$$= \frac{2fl^2}{3}\int_{\xi_i}^{1}(\xi-\xi_i)(6\xi-6\xi^2-1)\,d\xi =$$

$$= -\frac{fl^2}{3}\xi_i^2(1-\xi_i)^2 = -1152\,\xi_i^2(1-\xi_i)^2,$$

$$\int \frac{I_0}{I}(y-c)^2\,ds = \int_0^l (y-c)^2\,dx = fl\int_0^1\left[4\xi(1-\xi)-\frac{2}{3}\right]^2 d\xi =$$

$$= 4f^2l\int_0^1\left(2\xi-2\xi^2-\frac{1}{3}\right)^2 d\xi = \frac{4f^2l}{45} = 76{,}8,$$

$$li_0^2 = l\frac{I_0}{A_0} = 24\,\frac{0{,}8^2}{12} = 1{,}28.$$

Secțiunea i devine secțiune curentă și se poate scrie

$$X_1 = \frac{1152\xi^2(1-\xi)^2}{76{,}8+1{,}28} = 14{,}754\,\xi^2(1-\xi)^2.$$

Linia de influență X_2

$$\int \frac{I_0}{I}\left(x-\frac{l}{2}\right)(x-x_i)\,ds = \int_{x_i}^{l}\left(x-\frac{l}{2}\right)(x-x_i)\,dx =$$

$$= \frac{l^3}{2}\int_{\xi_i}^{1}(\xi-\xi_i)(2\xi-1)\,d\xi = \frac{l^3}{12}(1-\xi_i)(1+\xi_i-2\xi_i^2) =$$

$$= 1152(1-\xi_i)(1+\xi_i-2\xi_i^2),$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\int \frac{I_0}{I}\left(x-\frac{l}{2}\right)^2 \mathrm{d}s = \int_0^l \left(x-\frac{l}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = l^3 \int_0^1 \left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{l^3}{12} = 1152.$$

Cu acestea, ecuaţia liniei de influenţă este

$$X_2 = (1-\xi)(1+\xi-2\xi^2).$$

Linia de influenţă X_3

$$\int \frac{I_0}{I}(x-x_i)\,\mathrm{d}s = \int_{x_i}^{l} (x-x_i)\,\mathrm{d}x = l^2 \int_{\xi_i}^{1} (\xi-\xi_i)\mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{l^2}{2}(1-\xi_i)^2 = 288\,(1-\xi_i)^2,$$

$$\int \frac{I_0}{I}\,\mathrm{d}s = \int_0^l \mathrm{d}x = l = 24.$$

Rezultă

$$X_3 = \frac{288(1-\xi)^2}{24} = 12(1-\xi)^2.$$

Linia de influenţă M_1. Conform relaţiilor (XIV.30),

$$M_1 = 4X_1 - 12X_2 + X_3.$$

Linia de influenţă M_j. Se utilizează relaţiile (XIV.31).

$$x_j = 7{,}2 \text{ m}, \quad y_j = \frac{7{,}2}{24}(24-7{,}2) = 5{,}04 \text{ m}$$

$(1-j)$ $$M_j = X_3 - 4{,}8X_2 - 1{,}04\ X_1 - 24(0{,}3-\xi),$$

$(j-2)$ $$M_j = X_3 - 4{,}8X_2 - 1{,}04X_1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Linia de influență N_j. Calculul se face cu ajutorul relației (XIV.32).

$$\operatorname{tg}\varphi_j = y_j' = \frac{1}{24}(24 - 2 \cdot 7{,}2) = 0{,}4,\ \sin\varphi_j = 0{,}3714,$$

$$\cos\varphi_j = 0{,}9285,$$

$(1-j)$ $$N_j = -0{,}9285X_1 - 0{,}3714\ (X_2 - 1),$$

$(j-2)$ $$N_j = -0{,}9285X_1 - 0{,}3714X_2.$$

Valorile ordonatelor liniilor de influență calculate sînt date în tabelul 14.5, iar configurațiile lor se reprezintă în figura 14.5.

Tabelul 14.5

ξ	X_1	X_2	X_3	M_1	M_j	N_j
0	0	1	12	0	0	0
0,1	0,1195	0,972	9,72	−1,4660	0,1301	−0,1006
0,2	0,3777	0,896	7,68	−1,5612	0,5864	−0,3121
0,3	0,6506	0,784	5,88	−0,9254	1,4401	−0,5239 −0,8953
0,4	0,8498	0,648	4,32	−0,0567	0,3258	−1,0297
0,5	0,9221	0,500	3,00	0,6885	−0,3590	−1,0419
0,6	0,8498	0,352	1,92	1,0953	−0,6534	−0,9198
0,7	0,6506	0,216	1,08	1,0906	−0,6335	−0,6843
0,8	0,3777	0,104	0,48	0,7428	−0,4120	−0,3893
0,9	0,1195	0,028	0,12	0,2620	−0,1387	−0,1214
1	0	0	0	0	0	0

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XV

CALCULUL DINAMIC AL STRUCTURILOR

Dinamica construcţiilor se ocupă cu studiul comportării structurilor de rezistenţă la acţiunea forţelor dinamice, pe baza metodelor specifice de investigare — teoretice şi experimentale. În mod obişnuit aceasta revine la a stabili răspunsul structurii la încărcarea dinamică, respectiv starea de eforturi şi deformaţii a acesteia.

Specificul încărcărilor dinamice constă în faptul că sub acţiunea lor structura de rezistenţă se află în mişcare, ceea ce înseamnă că diferitele părţi ale sale se deplasează cu o anumită acceleraţie.

După modul în care variază acceleraţia, se disting următoarele tipuri de încărcări dinamice:

— încărcări dinamice ce produc acceleraţie constantă,

— încărcări dinamice ce produc acceleraţie variabilă în timp.

Mişcările produse de acest al doilea tip de încărcări dinamice se numesc vibraţii sau oscilaţii. Ele prezintă un interes deosebit pentru practica proiectării structurilor de rezistenţă.

Mişcările vibratorii se clasifică pe baza mai multor criterii:

— după forma de reprezentare analitică (armonice, periodice, crescătoare, descrescătoare, oarecare),

— după cauzele care le produc (vibraţii libere, vibraţii forţate, şocul),

— după prezenţa forţelor rezistente (vibraţii amortizate, vibraţii neamortizate).

Calculul dinamic prezentat în acest capitol este calculul dinamic liniar elastic. În consecinţă, şi aici sînt valabile ipotezele calculului static de ordinul I referitoare la comportarea materialului ($\sigma = E\varepsilon$) la deplasările structurii (sînt mici în comparaţie cu dimensiunile structurii) şi la relaţia forţă — deplasare (care se consideră liniară).

Structurile de rezistenţă, avînd masa distribuită pe fiecare din elementele lor, sînt sisteme cu un număr infinit de grade de libertate

Scanned with OKEN Scanner

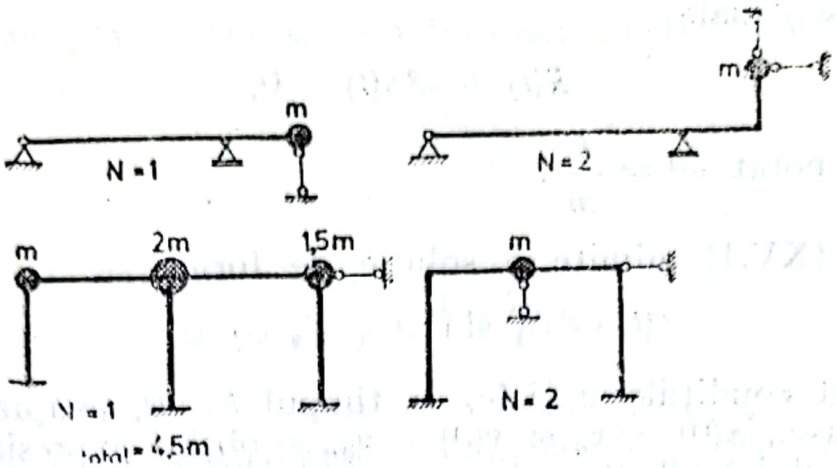


Fig. XV.1

dinamică. În practică se obișnuiește să se treacă de la structurile reale la sisteme convenționale cu un număr finit de grade de libertate, a căror rezolvare este mai ușor abordabilă.

În cele ce urmează, prin *grade de libertate dinamică se înțelege numărul de parametri liniar independenți, necesari pentru definirea poziției maselor în orice moment al mișcării.*

Din acest punct de vedere structurile reale pot fi reduse la sisteme cu un singur grad de libertate sau la sisteme cu mai multe grade de libertate.

În figura XV.1 sînt prezentate cîteva exemple de structuri, cu unul sau mai multe grade de libertate dinamică. Numărul gradelor de libertate a fost notat cu N și este indicat direct în figura XV.1.

În aplicații, pentru ușurința transformării unităților de măsură, masele se exprimă în unități derivate:

$$m = \frac{I}{a} = \frac{[F]}{[L][T^{-2}]} = \frac{FT^2}{L}$$

A. SISTEME CU UN SINGUR GRAD DE LIBERTATE

Vibrații libere neamortizate

Se consideră un sistem oscilant, cu un singur grad de libertate, avînd masa m. În timpul vibrației asupra masei acționează forța de inerție $F_i = -m\ddot{x}(t)$ și forța elastică $F_e = kx(t)$. Din condiția de echilibru dinamic rezultă ecuația mișcării masei

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \qquad \text{(XV.1)}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau în forma uzuală

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \tag{XV.2}$$

în care s-a notat $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Ecuaţia (XV.1) admite o soluţie de forma

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t. \tag{XV.3}$$

Impunînd condiţiile iniţiale, la timpul $t = 0$, asupra deplasării şi vitezei masei, $x(0) = x_0$ şi $\dot{x}(0) = v_0$, se obţine expresia deplasării masei sistemului oscilant:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t. \tag{XV.4}$$

În ecuaţia (XV.2), ω reprezintă numărul de vibraţii în 2π secunde şi se numeşte pulsaţia vibraţiilor libere ale sistemului cu un grad de libertate. Ea este o caracteristică a fiecărui sistem oscilant. Expresia uzuală de calcul a pulsaţiei vibraţiilor proprii este

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta}}, \tag{XV.5}$$

unde k reprezintă rigiditatea, iar δ flexibilitatea sistemului oscilant.

Pulsaţia permite determinarea unei alte caracteristici dinamice a sistemului oscilant şi anume, perioada vibraţiilor proprii, notată cu T şi care are expresia

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{XV.6}$$

Dacă se consideră că masa este obţinută din relaţia $G = mg$ atunci rezultă

$$\omega = \sqrt{\frac{gk}{G}} = \sqrt{\frac{g}{G\delta}}. \tag{XV.7}$$

Notînd cu x_{st} deplasarea masei, produsă de forţa G aplicată static pe direcţia de oscilaţie,

$$x_{st} = G\delta = \frac{G}{k}, \tag{XV.8}$$

Scanned with OKEN Scanner

expresiile pulsației și perioadei vibrațiilor libere devin:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{x_{st}}} \tag{XV.9}$$

și respectiv

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}2\sqrt{x_{st}}, \tag{XV.10}$$

unde deplasarea x_{st} se măsoară în centimetri, iar $g = 981$ cm/sec^2.

De remarcat că din calculul vibrațiilor libere se obțin numai caracteristicile dinamice ale sistemului oscilant, ω și T.

Vibrații forțate neamortizate

Se consideră că asupra masei sistemului oscilant acționează o forță perturbatoare periodică $F(t) = F_0 \sin \theta t$.

Ecuația mișcării masei rezultă din condiția de echilibru dinamic dintre forța perturbatoare, forța de inerție și forța elastică

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \sin \theta t \tag{XV.11}$$

sau, după împărțirea cu m,

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f_0 \sin \theta t, \tag{XV.12}$$

unde $\omega^2 = \frac{k}{m}$ și $f_0 = \frac{F_0}{m}$.

Dacă se admite că forța perturbatoare începe să acționeze asupra masei la timpul $t = 0$, cînd aceasta se află în repaus, deci $x(0) = 0$ și $\dot{x}(0) = 0$, rezultă următoarea expresie pentru deplasarea masei

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega^2 - \theta^2}\left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega} \sin \omega t\right). \tag{XV.13}$$

După trecerea unui anumit interval de timp, vibrațiile libere se amortizează, termenul care conține $\sin \omega t$ devine zero, iar deplasarea masei primește forma

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega^2 - \theta^2} \sin \theta t. \tag{XV.14}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deplasarea maximă se obține pentru $\sin \theta t = 1$,

$$x_d = \frac{f_0}{\omega^2 - \theta^2} = \frac{f_0}{\omega^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} = \mu x_{st}^0, \qquad \text{(XV.15)}$$

unde

$$\frac{f_0}{\omega^2} = \frac{F_0}{k} = x_{st}^0 \text{ și } \mu = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}. \qquad \text{(XV.16)}$$

În relațiile (XV.16), μ reprezintă coeficientul dinamic sau multiplicatorul dinamic, iar x_{st}^0 este deplasarea pe direcția gradului de libertate, produsă de forța F_0 considerată ca acționînd static pe sistemul elastic.

Cu aceste notații se pot obține:

— deplasarea masei sistemului oscilant

$$x(t) = x_d \sin \theta t = \mu x_{st}^0 \sin \theta t, \qquad \text{(XV.17)}$$

— forța de inerție ce acționează asupra masei

$$F_i = -m\ddot{x}(t) = m\theta^2 x_d \sin \theta t, \qquad \text{(XV.18)}$$

— forța dinamică totală ce acționează asupra masei

$$F_d(t) = F(t) + F_i = F_d \sin \theta t, \qquad \text{(XV.19)}$$

unde

$$F_d = F_0 + m\theta^2 x_d = \mu F_0 \qquad \text{(XV.20)}$$

reprezintă forța dinamică maximă.

De remarcat că pentru situația particulară $\theta = \omega$, valoarea coeficientului dinamic devine egală cu infinit; are loc fenomenul de rezonanță.

Pentru a se evita fenomenul de rezonanță se introduc restricții asupra pulsației θ a forței perturbatoare și anume

$$0{,}750\omega \leqslant \theta \leqslant 1{,}25\ \omega.$$

Cazul $\theta \leqslant 0{,}75\ \omega$ se numește acordare joasă, iar cazul $\theta \geqslant 1{,}25\,\omega$, acordare înaltă.

Din calculul vibrațiilor forțate se obțin atît deplasările cît și eforturile produse de forța perturbatoare acționînd asupra sistemului oscilant.

Scanned with OKEN Scanner

APLICAȚII

Problema 15.1. Să se determine caracteristicile dinamice ale consolei din figura 15.1. Se dau $m = 400$ daNs²/m, $I = 9800$ cm⁴, $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ daN/cm².

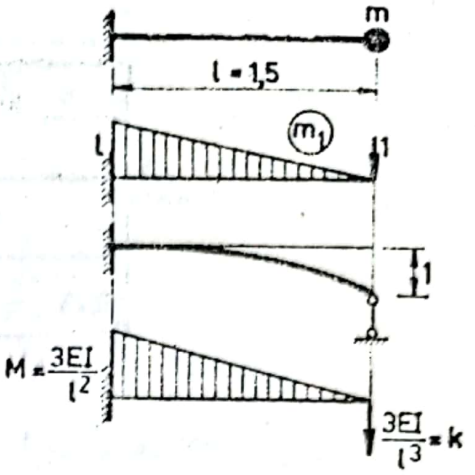


Fig. 15.1

1. Utilizînd pentru pulsație expresia $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{m\delta}}$, se obține succesiv:

$$\delta = \int \frac{m_1^2}{EI}\,dx = \frac{l^3}{3EI},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3EI}{ml^3}} = 6{,}75 \text{ 1/s}.$$

2. Dacă se folosește relația $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, cu $k = \dfrac{3EI}{l^3}$, rezultă aceeași valoare pentru ω. Perioada pulsațiilor proprii este

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}932 \text{ s}.$$

3. Dacă se presupune că masa se reduce la jumătate, rezultă:

$$\omega = 9{,}6 \text{ 1/s} \quad \text{și} \quad T = 0{,}655 \text{ s}.$$

4. Dacă masa se dublează, se obține:

$$\omega = 4{,}8 \text{ 1/s} \quad \text{și} \quad T = 1{,}31 \text{ s}.$$

5. Dacă lungimea se dublează, $l = 3$ m, considerînd masa inițială, rezultă:

$$\omega = 2{,}4 \text{ 1/s} \quad \text{și} \quad T = 2{,}62 \text{ s}.$$

Problema 15.2. Să se calculeze pulsația și perioada vibrațiilor proprii la grinda continuă din figura 15.2. Se dau: $m = 30$ kNs²/m și $EI = 15000$ kNm².

Pulsația se va determina utilizînd relația $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{m\delta}}$, unde δ este deplasarea pe direcția gradului de libertate dinamică, produsă de o forță egală cu unitatea.

Scanned with OKEN Scanner

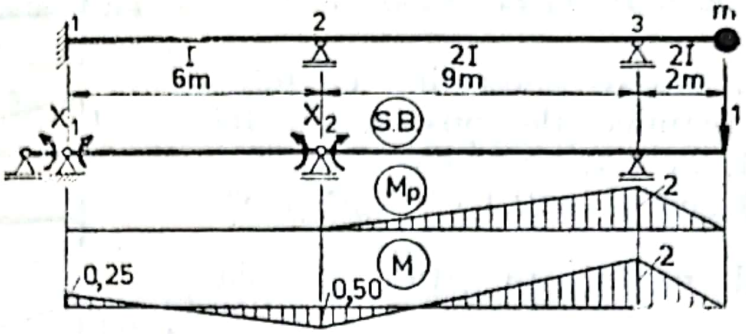


Fig. 15.2.

Calculul diagramei de moment încovoietor se efectuează utilizînd ecuaţia celor trei momente.

Se alege $I_0 = I$ şi rezultă: $\lambda_{12} = 6$ m şi $\lambda_{23} = 4{,}5$ m. Din diagrama m_p se obţine reacţiunea fictivă $\mathcal{R}_{23} = -3$.

Sistemul de ecuaţii, reprezentînd condiţiile de continuitate din secţiunile 1 şi 2, este:

$$\begin{cases} 12X_1 + 6X_2 = 0 \\ 6X_1 + 21X_2 = 9 \end{cases}$$

de unde rezultă: $X_1 = -0{,}25$ şi $X_2 = 0{,}50$.

Cu valorile necunoscutelor s-a trasat diagrama m, produsă de forţa — unitate. Deplasarea unitară este

$$\delta = \int \frac{m_p m}{EI}\,dx = \frac{1}{2EI}\left[\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 2\left(\frac{2}{3}\cdot 2 - \frac{1}{3}\cdot 0{,}5\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\right] = \frac{6{,}583}{EI}.$$

Pulsaţia şi perioada vibraţiilor libere au valorile:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta}} = \sqrt{\frac{15000}{6{,}583\cdot 30}} = 8{,}715 \text{ rad/s},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}721 \text{ s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

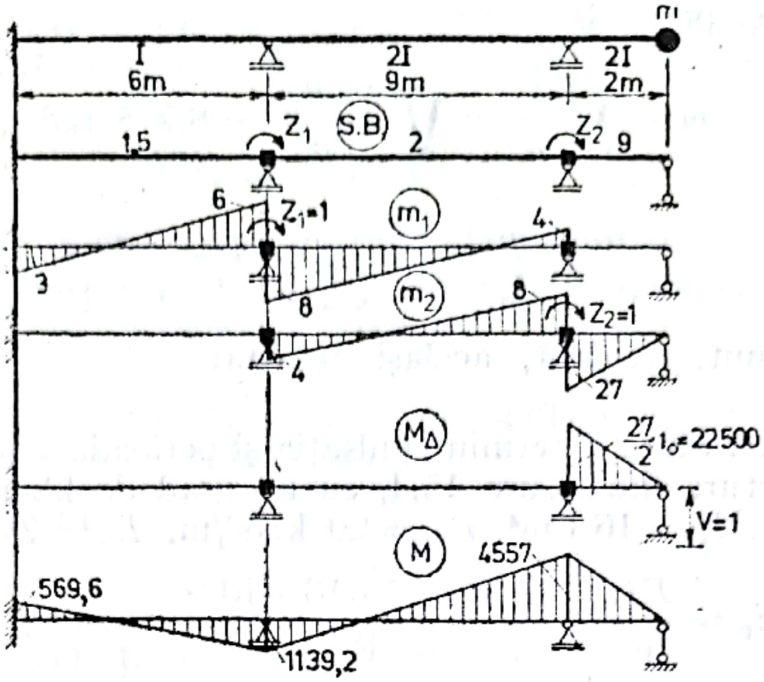


Fig. 15.3

Problema 15.3. Pentru grinda continuă de la aplicația precedentă, să se determine pulsația și perioada vibrațiilor proprii utilizînd caracteristica de rigiditate.

Pulsația se va determina utilizînd relația $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, unde k este forța (rigiditatea) ce apare în legătura pe direcția gradului de libertate, cînd pe această direcție se produce o deplasare egală cu unitatea.

Alegînd $i_0 = \frac{EI}{9} = \frac{5000}{3}$, rezultă următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} 14Z_1 + 4Z_2 = 0 \\ 4Z_1 + 35Z_2 - 22500 = 0 \end{cases}$$

cu valorile necunoscutelor: $Z_1 = -189{,}87$, $Z_2 = 664{,}545$.

Diagrama de moment încovoietor, $M = m_1 Z_1 + m_2 Z_2$, este dată direct în figură. De aici rezultă forța în legătura pe direcția gradului de libertate.

$$k = \frac{M}{l} = \frac{4557}{2} = 2278{,}5.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pulsația și perioada sînt:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2278,5}{30}} = 8,715 \text{ rad/s},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,721 \text{ s}.$$

S-a obținut, evident, același rezultat.

Problema 15.4. Să se determine pulsația și perioada vibrațiilor proprii, la structura din figura 15.4, cu un grad de libertate dinamică. Se dau: $I_s = 16$ dm^4, $m_1 = 20$ kNs^2/m, $E_b = 240000$ daN/cm^2.

Alegînd $i_0 = \frac{EI_s}{6} = \frac{2,4 \cdot 10^7 \cdot 16 \cdot 10^{-4}}{6} = 6400$, din diagrama m_1 se obține

$$k = r_{11} = \frac{2,15 i_0}{6} = 2293,33.$$

Pulsația și perioada vibrațiilor proprii, pentru masa totală de 5 m, rezultă:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2293,33}{100}} = 4,79 \text{ rad/s}.$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,312 \text{ s}.$$

Observație. Perioada se poate calcula direct cu relația $T = 0,2\sqrt{x_{st}}$, unde x_{st} este deplasarea pe direcția gradului de libertate, produsă de forța gravitațională totală presupusă că acționează pe această direc-

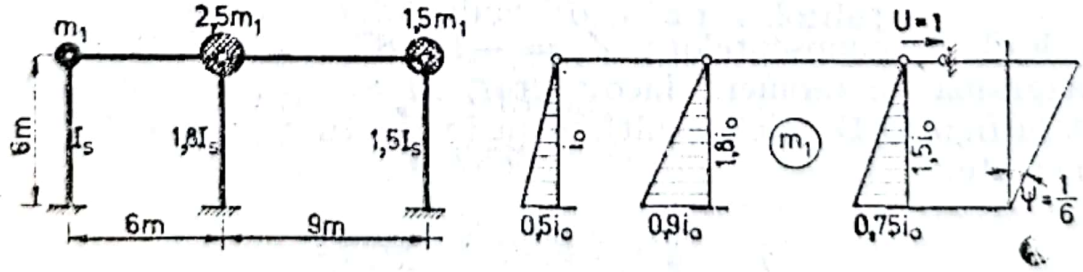


Fig. 15.4

ție. Această deplasare nu este reală; ea se utilizează numai pentru calculul perioadei vibrațiilor libere la sisteme cu un singur grad de libertate.

$$G = 5mg = 981 \text{ kN}.$$

Presupunînd că structura se comportă ca un singur stîlp, avînd momentul de inerție egal cu $\sum I_i = 4{,}3\ I_s$, deplasarea capătului superior este

$$x_{st} = G\delta = 981 \cdot \frac{6^3}{3 \cdot 4{,}3EI_s} = 0{,}428 \text{ m} = 42{,}8 \text{ cm}.$$

Perioada rezultă

$$T = 0{,}2\sqrt{x_{st}} = 1{,}309 \text{ s},$$

deci rezultat corect, ținînd seama că relația utilizată pentru T este aproximativă.

Problema 15.5. Să se determine pulsația și perioada vibrațiilor proprii la structura din figura 15.5. Se dau: $m_1 = 25$ kNs²/m și $E = 290000$ daN/cm².

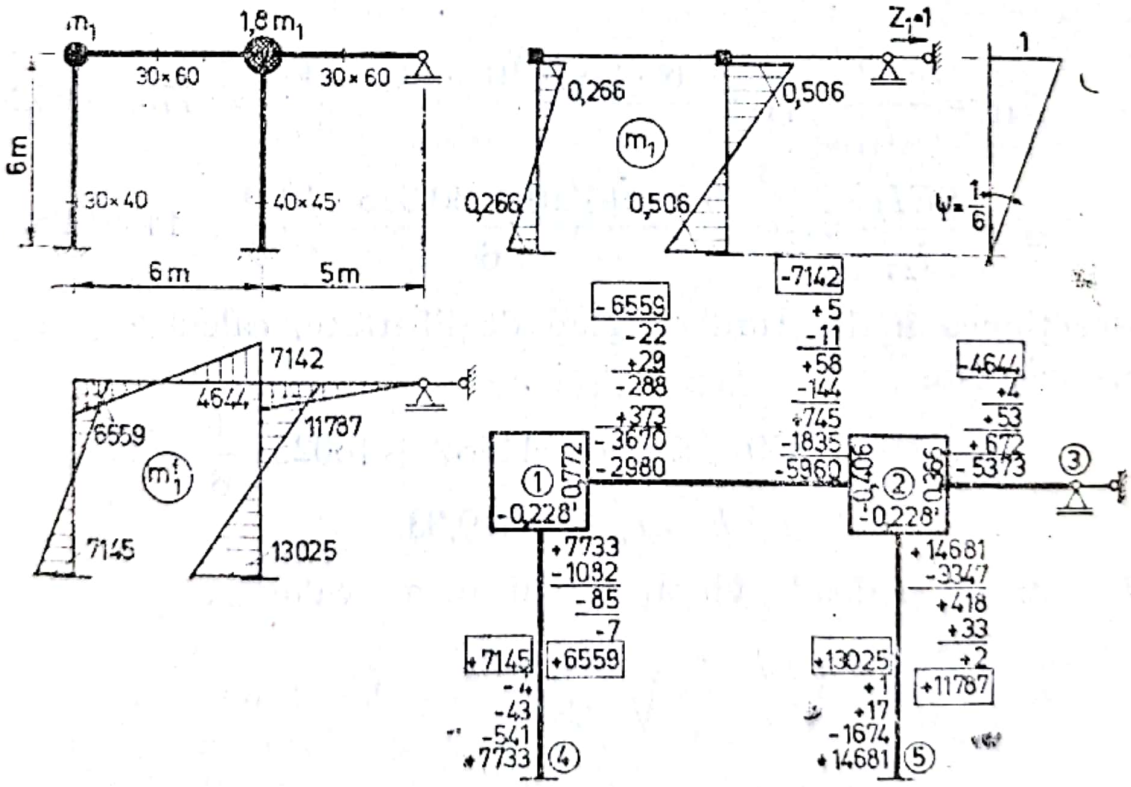


Fig. 15.5

Scanned with OKEN Scanner

Problema se rezolvă adoptînd, pentru calculul reacţiunii din legătura de grad de libertate, procedeul operării în două etape.

Momentele de inerţie:

$$I_{12} = I_{23} = \frac{3 \cdot 6^3}{12} = 54 \text{ dm}^4,$$

$$I_{14} = \frac{3 \cdot 4^3}{12} = 16 \text{ dm}^4,$$

$$I_{25} = \frac{4 \cdot 4{,}5^3}{12} = 30{,}375 \text{ dm}^4.$$

Coeficienţii de rigiditate:

$$\rho_{12} = 0{,}90, \quad \rho_{23} = 0{,}81, \quad \rho_{14} = 0{,}266, \quad \rho_{25} = 0{,}506.$$

$$\sum_1 \rho_{1i} = 1{,}166, \quad \sum_2 \rho_{2i} = 2{,}216.$$

Coeficienţii de distribuţie au fost trecuţi direct pe schema de iterare.

Momentele încovoietoare de încastrare perfectă din diagrama m_1 sînt:

$$\mathfrak{M}_{14} = \mathfrak{M}_{41} = \frac{6EI_{14}}{l_{14}} \psi_{14} = \frac{6 \cdot 2{,}9 \cdot 10^7 \cdot 16 \cdot 10^{-4}}{6^2} = 7733{,}33 \text{ kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{25} = \mathfrak{M}_{52} = \frac{6EI_{25}}{l_{25}} \psi_{25} = \frac{6 \cdot 2{,}9 \cdot 10^7 \cdot 30{,}375 \cdot 10^{-4}}{6^2} = 14681{,}25 \text{ kNm}$$

Reacţiunea în legătura de grad de libertate, calculată din diagrama m_1^f, este

$$r_{11} \cdot 1 - (6559 + 7145 + 11787 + 16025) \frac{1}{6} = 0,$$

$$k = r_{11} = 6419{,}33.$$

Pulsaţia şi perioada vibraţiilor libere au valorile:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{6419{,}33}{2{,}8 \cdot 25}} = 9{,}57 \text{ rad/s},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}656 \text{ s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Dacă pentru calculul pulsației s-ar fi utilizat flexibilitatea δ, atunci, comparativ cu modul de calcul dezvoltat mai înainte, era necesar să se parcurgă în plus următoarele etape:

— rezolvarea ecuației de condiție specifică operării în două etape și calculul diagramei m_1 produsă de o forță egală cu unitatea acționînd pe direcția gradului de libertate;

— integrarea diagramei m_1 cu ea însăși (sau cu o diagramă m_1^0 trasată pe un sistem de bază static determinat).

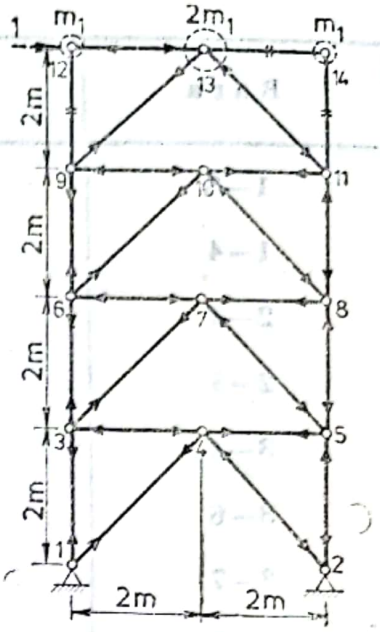


Fig. 15.6

Problema 15.6. Turnul de susținere pentru un rezervor de apă este realizat sub forma unei structuri metalice spațiale avînd nodurile articulate. Se cere să se calculeze pulsația și perioada vibrațiilor libere pentru una din fețele laterale care are dimensiunile din figura 15.6. Se dau: $m_1 = 60$ daNs²/cm, $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ daN/cm².

Pulsația se calculează cu relația $\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta}}$. Pentru determinarea flexibilității δ se încarcă grinda cu zăbrele cu o forță egală cu unitatea acționînd pe orizontală.

Calculul elementelor necesare se efectuează în tabelul 15.1.

$$\delta = \sum \frac{n^2 l}{EA} = \frac{127{,}237}{E} = 6{,}0689 \cdot 10^{-5}.$$

Pulsația și perioada au valorile:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta}} = \sqrt{\frac{1}{6{,}0589 \cdot 10^{-5} \cdot 240}} = 8{,}29 \text{ rad/s},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}757 \text{ s}.$$

Problema 15.7. La mijlocul grinzii simplu rezemate din figura 15.7 se află un bloc motor cu greutatea $G = 40$ kN. În timpul funcționării motorului se consideră că acesta acționează cu o forță perturbatoare periodică $F(t) = F_0 \sin \theta t$, unde $F_0 = 25$ kN. Se cere să se studieze funcționarea sa în cazul acordărilor joasă

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 15.1

Bara	l (cm)	A (cm²)	n	$\frac{n^2 l}{A}$
1—3	200	48	3/2	9,375
1—4	282	20	$\sqrt{2}/2$	7,050
2—4	282	20	$-\sqrt{2}/2$	7,050
2—5	200	48	— 3/2	9,375
3—4	200	12	— 1/2	4,167
3—6	200	48	1	4,167
3—7	282	20	$\sqrt{2}/2$	7,050
4—5	200	12	1/2	4,167
5—7	282	20	$-\sqrt{2}/2$	7,050
5—8	200	48	— 1	4,167
6—7	200	12	— 1/2	4,167
6—9	200	48	1/2	1,042
6—10	282	20	$\sqrt{2}/2$	7,050
7—8	200	12	1/2	4,167
8—10	282	20	$-\sqrt{2}/2$	7,050
8—11	200	48	— 1/2	1,042
9—10	200	12	— 1/2	4,167
9—12	200	48	0	0
9—13	282	20	$\sqrt{2}/2$	7,050
10—11	200	12	1/2	4,167
10—11	282	20	$-\sqrt{2}/2$	7,050
11—14	200	48	0	0
12—13	200	12	— 1	16,667
13—14	200	12	0	0

Scanned with OKEN Scanner

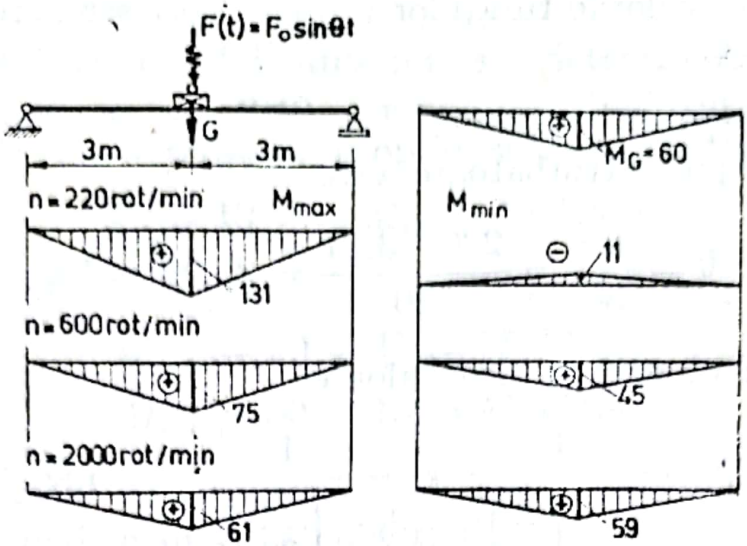


Fig. 15.7

și înaltă, determinînd momentele încovoietoare maxime și minime pentru motoare cu caracteristicile $n = 220$, 600 și 2000 rotații/minut. Se consideră $EI = 20580$ kNm².

Din acțiunea statică a forței G, săgeata la mijlocul grinzii este

$$x_{st} = G\delta_{11} = G\,\frac{l^3}{48EI} = 40\,\frac{6^3}{48 \cdot 20580} = 0{,}87 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 0{,}87\ \text{cm}.$$

Pulsația proprie a grinzii cu blocul motor are valoarea

$$\omega = \sqrt{\frac{9}{x_{st}}} = \sqrt{\frac{981}{0{,}87}} = 33{,}58\ \text{rad/s}.$$

Funcționînd în cazul acordării joase, pulsația forței perturbatoare trebuie să îndeplinească condiția

$$\theta < 0{,}75\ \omega = 0{,}75 \cdot 33{,}58 = 25{,}18\ \text{rad/s},$$

iar în cazul acordării înalte

$$\theta > 1{,}25\,\omega = 1{,}25 \cdot 33{,}58 = 41{,}98\ \text{rad/s}.$$

Transformînd în rotații pe minut condițiile de mai sus, se obțin limitele:

$$n < \frac{30\theta}{\pi} = \frac{30 \cdot 25{,}18}{3{,}14} = 240\ \text{rotații/minut}$$

și

$$n > \frac{30 \cdot 41{,}98}{3{,}14} = 401\ \text{rotații/minut}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, valorile turațiilor propuse spre studiere sînt în afara limitelor impuse.

Cazul $n = 220$ *rotații/minut.*

Pulsația forței perturbatoare este

$$\theta = \frac{n\pi}{30} = \frac{220 \cdot 3{,}14}{30} = 23{,}02 \text{ rad/s}.$$

Coeficientul dinamic μ are valoarea

$$\mu = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{23{,}03}{33{,}58}\right)^2} = 1{,}89.$$

Forța dinamică maximă rezultă

$$F_d = \mu F_0 = 1{,}89 \cdot 25 = 47{,}25 \text{ kN},$$

iar momentul încovoietor corespunzător, la mijlocul grinzii, este

$$M_{l/2} = \frac{47{,}25}{2} \cdot 3 = 70{,}88 \text{ kNm}.$$

Momentele încovoietoare maxim și minim, la mijlocul grinzii, se calculează:

$$M_{max} = 60 + 70{,}88 = 130{,}88 \text{ kNm},$$

$$M_{min} = 60 - 70{,}88 = -10{,}88 \text{ kNm}.$$

Deplasările mijlocului grinzii urmează și ele sensurile momentelor încovoietoare maxim și minim. Deplasarea maximă din acțiunea forței dinamice are valoarea

$$x_d = \mu x_{st}^0 = \mu F_0 \delta_{11} = 1{,}89 \cdot 25 \cdot \frac{6^3}{48 \cdot 20580} \cdot 100 = 1{,}03 \text{ cm}.$$

Prin urmare, deplasările mijlocului grinzii sînt:

$$x_{l/2} = x_{st} \pm x_d = (0{,}87 \pm 1{,}03) \text{ cm},$$

astfel încît

$$x_{max} = 1{,}90 \text{ cm}, \quad x_{min} = -0{,}16 \text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cazul $n = 600$ *rotații/minut.*

Reluînd etapele cazului anterior se determină:

$\theta = 62{,}8$ rad/s, $\mu = -0{,}40$, semnul (—) indicînd un decalaj de fază egal cu π între pulsația proprie și forța perturbatoare,

$$F_d = 10 \text{ kN}, \quad M_{1/2} = 15 \text{ kNm}$$

și eforturile extreme:

$$M_{max} = 60 + 15 = 75 \text{ kNm},$$

$$M_{min} = 60 - 15 = 45 \text{ kNm}.$$

Cazul $n = 2000$ *rotații/minut.*

La fel ca mai înainte se determină:

$$\theta = 209{,}33 \text{ rad/s}, \quad \mu = 0{,}026, \quad F_d = 0{,}66 \text{ kN},$$

$M_{1/2} = 1$ kNm, $M_{max} = 60 + 1 = 61$ kNm, $M_{min} = 60 - 1 = 59$ kNm.

Valorile momentelor încovoietoare obținute sînt reprezentate în figura 15.7.

Problema 15.8. Se consideră structura cu un nivel din figura 15.8. Să se calculeze diagrama de moment încovoietor rezultată din acțiunea forței perturbatoare $F(t) = F_0 \sin \theta t$, cu $F_0 = 70$ kN și $\theta = 10$ rad/s. Stîlpii sînt realizați din beton armat avînd $E = 270000$ daN/cm². Forța gravitațională totală la nivelul riglei este $G = 420$ kN.

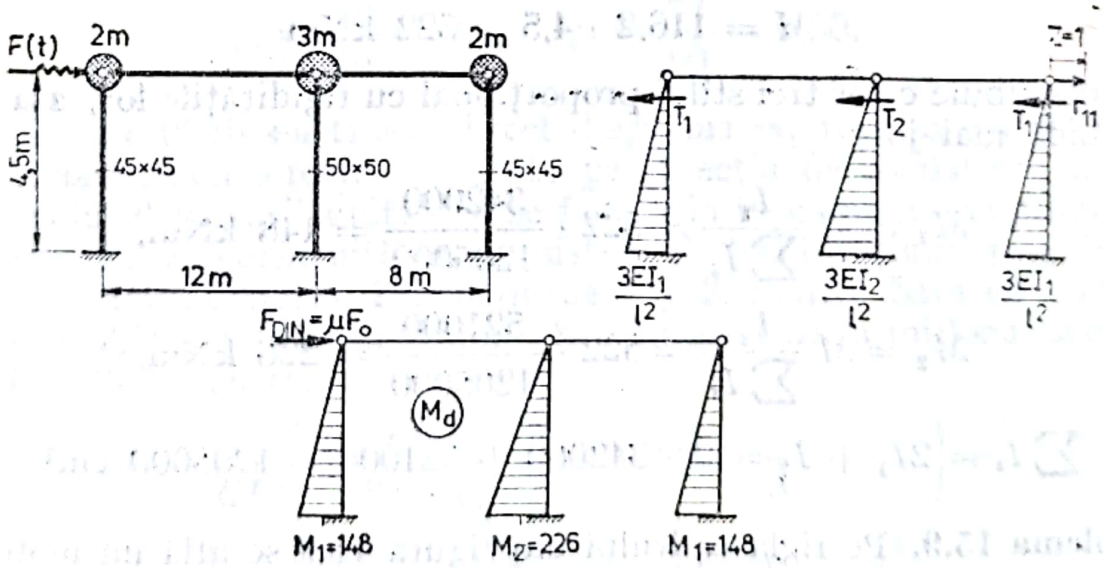


Fig. 15.8

Inv. 75658

Pentru calculul pulsației vibrațiilor proprii, ω, se consideră o deplasare — unitate pe direcția de oscilație a maselor concentrate, valoarea reacțiunii unitare fiind

$$r_{11} = 2T_1 + T_2 = 2\,\frac{3EI_1}{l^3} + \frac{3EI_2}{l^3} =$$

$$= 2 \cdot \frac{3 \cdot 270000 \cdot 342000}{450^3} + \frac{3 \cdot 270000 \cdot 521000}{450^3} = 10711.$$

Valorile pulsației și perioadei vibrațiilor proprii sînt:

$$\omega = \sqrt{\frac{r_{11}}{m}} = \sqrt{\frac{gr_{11}}{G}} = \sqrt{\frac{981 \cdot 10711}{420 \cdot 10^2}} = 15{,}82 \text{ rad/s},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}40 \text{ s}.$$

Coeficientul dinamic corespunzător este

$$\mu = \frac{1}{1 - (\theta/\omega)^2} = \frac{1}{1 - (10/15{,}82)^2} = 1{,}66,$$

iar forța dinamică

$$F_d = F_0 = 1{,}66 \cdot 70 = 116{,}2 \text{ kN}.$$

Momentul încovoietor total produs de această forță este

$$M = 116{,}2 \cdot 4{,}5 = 522 \text{ kNm}$$

și se distribuie celor trei stîlpi proporțional cu rigiditățile lor, așa cum se indică mai jos:

$$M_1 = M\,\frac{I_1}{\sum I_s} = 522 \cdot \frac{342000}{1205000} = 148 \text{ kNm},$$

$$M_2 = M\,\frac{I_2}{\sum I_s} = 522 \cdot \frac{521000}{1205000} = 226 \text{ kNm},$$

unde $\sum I_s = 2I_1 + I_2 = 2 \cdot 342000 + 521000 = 1205000$ cm^4.

Problema 15.9. Pe rigla cadrului din figura 15.9 se află un motor cu greutatea $G = 8$ kN ce acționează cu o forță perturbatoare $F(t) = F_0 \sin \theta t$ asupra cadrului. Se cunosc: $F_0 = 6$ kN și $n =$

Scanned with OKEN Scanner

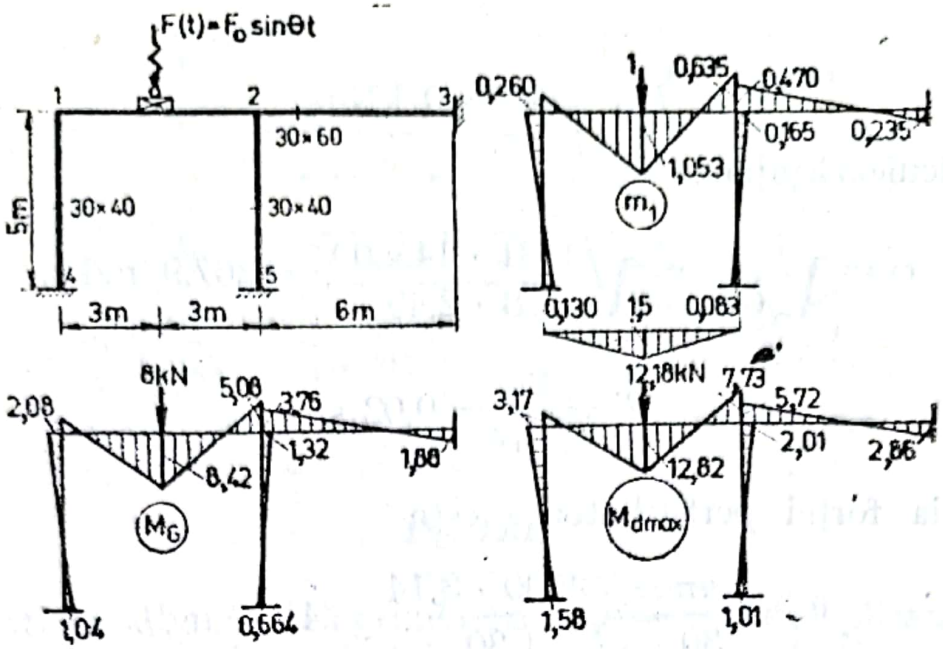


Fig. 15.9

$= 4000$ rot/min. Să se calculeze diagrama de moment încovoietor rezultată în timpul funcționării motorului. Modulul de elasticitate al betonului este $E = 270000$ daN/cm^2.

Momentele de inerție ale barelor sînt următoarele:

$$I_s = \frac{3 \cdot 4^3}{12} = 16 \text{ dm}^4, \quad I_r = \frac{3 \cdot 6^3}{12} = 54 \text{ dm}^4.$$

Coeficienții de rigiditate ai barelor sînt:

$$\rho_s = \frac{16}{50} = 0{,}32, \quad \rho_r = \frac{54}{60} = 0{,}90.$$

În figura 15.10 s-a trasat direct diagrama m_1 rezultată din încărcarea structurii cu o forță — unitate pe direcția de oscilație a masei.

Calculul deplasării unitare δ se face prin integrarea diagramei m_1 cu diagrama m_1^0 construită pe un sistem de bază obținut prin introducerea a două articulații în nodurile 1 și 2. Pentru bara dublu articulată 1—2, momentul încovoietor în secțiunea de la mijlocul acesteia este 1,5. Prin urmare

$$\delta = \frac{1}{EI_r}\left[\frac{1{,}5 \cdot 3}{2}\left(-\frac{1}{3} \cdot 0{,}260 + \frac{2}{3} \cdot 1{,}053\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1{,}5 \cdot 3}{2}\left(\frac{2}{3} \cdot 1{,}053 - \frac{1}{3} \cdot 0{,}635\right)\right] = \frac{2{,}49}{EI_r},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$EI_r = 145800 \text{ kNm}^2.$$

Se calculează apoi:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{G\delta}} = \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 145800}{8 \cdot 2{,}49}} = 267{,}9 \text{ rad/s}.$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}02 \text{ s}.$$

Pulsația forței perturbatoare este

$$\theta = \frac{n\pi}{30} = \frac{4000 \cdot 3{,}14}{30} = 418{,}7 \text{ rad/s}$$

Pentru raportul $\frac{\theta}{\omega} = \frac{418{,}7}{267{,}9} = 1{,}56$,

coeficientul dinamic este

$$\mu = \frac{1}{1 - (1{,}56)^2} = -0{,}697,$$

iar forțele extreme ce acționează pe direcția de oscilație sînt:

$$F_{max} = 8 + 0{,}697 \cdot 6 = 12{,}18 \text{ kN},$$

$$F_{min} = 8 - 0{,}697 \cdot 6 = 3{,}82 \text{ kN}.$$

În figura 15.9 s-au trasat diagramele de momente încovoietoare corespunzînd aplicării statice a greutății G, cît și acțiunii forței F_{max}.

Problema 15.10. Pe grinda simplu rezemată din figura 15.10, la distanța $l/3$ de capătul din dreapta, se află masa concentrată m, iar la distanța $l/3$ de capătul din stînga acționează o forță perturbatoare $F(t) = F_0 \sin \theta t$. Se cere să se determine deplasările maxime ale masei m precum și diagrama de moment încovoietor corespunzătoare. Se dau: $m = 50$ daNs²/m, $F_0 = 30$ daN, $\theta = 90$ rad/s, $EI = 27000$ kNm².

Se trasează mai întîi diagrama de moment încovoietor corespunzînd aplicării statice a forței F_0 și a greutății $G = mg$.

Scanned with OKEN Scanner

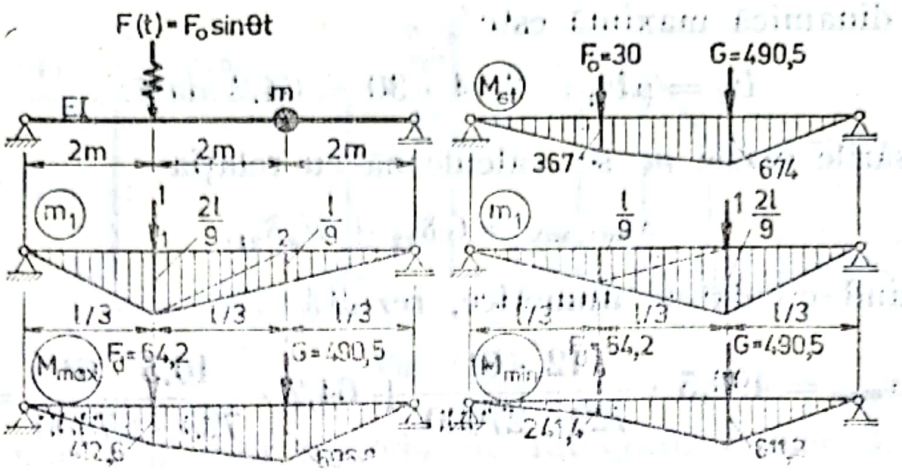


Fig. 15.10

În continuare se încarcă grinda cu forța — unitate aplicată în dreptul masei și respectiv a forței perturbatoare, calculîndu-se deplasările unitare δ_{22} și δ_{21}:

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2l}{9}\cdot\frac{2l}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2l}{9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2l}{9}\cdot\frac{l}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2l}{9}\right] =$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{8l^3}{729} + \frac{4l^3}{729}\right) = \frac{12l^3}{729EI},$$

$$\delta_{21} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2l}{9}\cdot\frac{l}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{l}{9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2l}{9}\cdot\frac{l}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{l}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2l}{9}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\cdot\frac{l}{9}\cdot\frac{l}{3}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{l}{9} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2l}{9}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{l}{9}\cdot\frac{l}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2l}{9}\right] =$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{2l^3}{729} + \frac{4l^3}{729} + \frac{2{,}5l^3}{729} + \frac{2l^3}{729}\right) = \frac{10{,}5l^3}{729EI}.$$

Pulsația proprie este

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{22}}} = \sqrt{\frac{729 \cdot 27000}{0{,}5 \cdot 12 \cdot 6^3}} = 123{,}24 \text{ rad/s}.$$

Coeficientul dinamic rezultă în acest caz

$$\mu = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - 0{,}73^2} = 2{,}14.$$

Scanned with OKEN Scanner

Forţa dinamică maximă este

$$F_d = \mu F_0 = 2{,}14 \cdot 30 = 64{,}2 \text{ daN}.$$

Deplasările masei m se calculează cu relaţia

$$x_{max,\,min} = G\delta_{22} \pm F_d\delta_{21}.$$

Înlocuind cu datele numerice, rezultă:

$$x_{max} = 490{,}5 \cdot \frac{12 \cdot 6^3}{729 \cdot 27000} + 64{,}2 \cdot \frac{10{,}5 \cdot 6^3}{729 \cdot 27000} =$$

$$= 0{,}0646 + 0{,}0074 = 0{,}0720 \text{ cm},$$

$$x_{min} = 0{,}0646 - 0{,}0074 = 0{,}0572 \text{ cm}.$$

Diagramele de momente încovoietoare maxime şi minime, trasate în figura 15.10, se calculează prin suprapunerea efectelor, cu relaţiile:

$$M^{(1)}_{max,\,min} = G\frac{l}{9} \pm F_d\frac{2l}{9},$$

$$M^{(2)}_{max,\,min} = G\frac{2l}{9} \pm F_d\frac{l}{9}.$$

Dacă se efectuează înlocuirile, se obţin valorile:

$$M^{(1)}_{max} = 490{,}5 \cdot \frac{6}{9} + 64{,}2 \cdot \frac{12}{9} = 327 + 85{,}6 = 412{,}6 \text{ daNm},$$

$$M^{(1)}_{min} = 327 - 85{,}6 = 241{,}4 \text{ daNm},$$

$$M^{(2)}_{max} = 490{,}5 \cdot \frac{12}{9} + 64{,}2 \cdot \frac{6}{9} = 654 + 42{,}8 = 696{,}8 \text{ daNm},$$

$$M^{(2)}_{min} = 654 - 42{,}8 = 611{,}2 \text{ daNm}.$$

Problema 15.11. Asupra halei cu un singur nivel, din figura 15.11, a, se aplică, la nivelul riglei, forţa perturbatoare $F(t)$, a cărei intensitate în timp variază conform diagramei din figura 15.11,b. Se cere ca, utilizînd integrarea numerică, să se determine răspunsul sistemului în timp, calculînd deplasările şi momentele încovoietoare maxime.

Scanned with OKEN Scanner

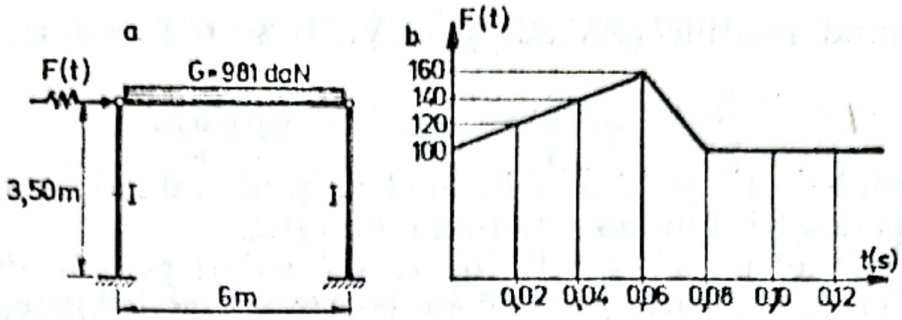


Fig. 15.11

Se expune mai întîi metoda de integrare numerică.

Metoda acceleraţiei constante.

Considerînd cunoscute deplasările $x^{(s)}$ — la timpul (s) — şi $x^{(s-1)}$ — la timpul $(s-1)$ —, acceleraţia $\ddot{x}^{(s)}$ se poate determina folosind ecuaţia de mişcare

$$m\ddot{x} + kx = F(t). \qquad \text{(XV.21)}$$

Ceea ce interesează este determinarea deplasării $x^{(s+1)}$ — la timpul $(s+1)$ —, prin extrapolare.

Formula de calcul a deplasării la timpul $(s+1)$ are forma

$$x^{(s+1)} = x^{(s)} + \dot{x}_m \Delta t, \qquad \text{(XV.22)}$$

unde $\dot{x}_m$ este viteza medie între momentele de timp (s) şi $(s+1)$, iar Δt este intervalul de timp considerat (figura 15.12, a).

Viteza se calculează cu formula

$$\dot{x}_p = \frac{x^{(s)} - x^{(s-1)}}{\Delta t} + \ddot{x}^{(s)} \Delta t, \qquad \text{(XV.23)}$$

unde $\ddot{x}^{(s)} \Delta t$ reprezintă creşterea vitezei faţă de intervalul Δt anterior.

Suprafaţa haşurată din figura 15.12, b reprezintă un impuls aplicat la momentul (s), semnificînd schimbarea în viteza medie între două intervale de timp adiacente.

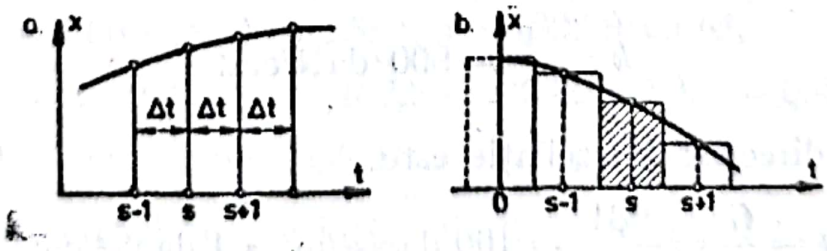


Fig. 15.12

Combinînd relaţiile (XV.22) şi (XV.23) se obţine formula de recurenţă

$$x^{(s+1)} = 2x^{(s)} - x^{(s-1)} + \ddot{x}^{(s)}(\Delta t)^2. \qquad \text{(XV.24)}$$

Intervalul de timp Δt ales în mod obişnuit este de o zecime din valoarea perioadei fundamentale de vibraţie.

La momentul iniţial, $t = 0$, nu există valori pentru $x^{(s-1)}$, astfel încît acceleraţia se poate considera constantă şi egală cu valoarea iniţială ($\ddot{x}^{(1)} = \ddot{x}^{(0)}$). Deplasarea după primul interval de timp este

$$x^{(1)} = \frac{1}{2}\ddot{x}^{(0)}(\Delta t)^2. \qquad \text{(XV.25)}$$

Dacă în momentul $t = 0$, $F(t) = 0$, deci şi $\ddot{x}^{(0)} = 0$, se utilizează formula

$$x^{(1)} = \frac{1}{6}[2\ddot{x}^{(0)} + \ddot{x}^{(1)}](\Delta t)^2. \qquad \text{(XV.26)}$$

Rezolvarea problemei propuse.

Pulsaţia proprie a sistemului cu cei doi stîlpi este

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta}} = \sqrt{\frac{981}{981 \cdot 1{,}112 \cdot 10^{-3}}} = 29{,}988 \text{ rad/s},$$

$$\text{cu } \delta = \frac{1}{2}\frac{h^3}{3EI} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3{,}5^3 \cdot 10^2}{3 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 3060} = 1{,}112 \cdot 10^{-3} \text{ cm/daN}.$$

Perioada vibraţiilor proprii are valoarea

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}21 \text{ s},$$

astfel încît intervalul Δt se alege

$$\Delta t = 0{,}02 \text{ s}.$$

Rigiditatea, sau constanta elastică a sistemului, se calculează

$$k = \frac{1}{\delta} = 900 \text{ daN/cm}.$$

Masa pe direcţia de oscilaţie este

$$m = \frac{G}{g} = \frac{981}{9{,}81} = 100 \text{ daNs}^2/\text{m} = 1 \text{ daNs}^2/\text{cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din ecuația de mișcare (XV.21) se poate scrie:

$$\ddot{x}^{(t)} = \frac{1}{m} F(t) - \frac{k}{m} x(t) = \frac{1}{1} F(t) - \frac{900}{1} x(t),$$

$$\ddot{x}(t) = 1 \cdot F(t) - 900x(t). \qquad \text{(XV.27)}$$

La momentul inițial $x = 0$, deci

$$\ddot{x}^{(0)} = F(0) = 100 \text{ cm/s}^2.$$

Aplicînd relația (XIV.25), rezultă deplasarea după primul interval de timp

$$x(0{,}02) = \frac{1}{2} \ddot{x}(0) (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 0{,}02^2 = 0{,}02 \text{ cm}.$$

Calculînd cu formula (XV.27), accelerația corespunzătoare se obține

$$\ddot{x}(0{,}02) = 120 - 900 \cdot 0{,}02 = 102 \text{ cm/s}^2.$$

Deoarece accelerația se poate considera egală cu cea inițială, se acceptă valoarea

$$\ddot{x}(0{,}02) = \ddot{x}(0) = 100 \text{ cm/s}^2.$$

Aplicînd în continuare succesiv relațiile (XV.24) și (XV.27), rezultă:

$$x(0{,}04) = 2 \cdot 0{,}02 - 0 + 100 \cdot 0{,}02^2 = 0{,}08 \text{ cm},$$

$$\ddot{x}(0{,}04) = 140 - 900 \cdot 0{,}08 = 68 \text{ cm/s}^2,$$

$$x(0{,}06) = 2 \cdot 0{,}08 - 0{,}02 + 68 \cdot 0{,}02^2 = 0{,}1672 \text{ cm},$$

$$\ddot{x}(0{,}06) = 160 - 900 \cdot 0{,}1672 = 9{,}52 \text{ cm/s}^2,$$

$$x(0{,}08) = 2 \cdot 0{,}1672 - 0{,}08 + 9{,}52 \cdot 0{,}02^2 = 0{,}2582 \text{ cm},$$

$$\ddot{x}(0{,}08) = 100 - 900 \cdot 0{,}2582 = -132{,}39 \text{ cm/s}^2,$$

$$x(0{,}10) = 2 \cdot 0{,}2582 - 0{,}1672 - 132{,}39 \cdot 0{,}02^2 = 0{,}4021 \text{ cm},$$

$$\ddot{x}(0{,}10) = 100 - 900 \cdot 0{,}4021 = -261{,}89 \text{ cm/s}^2.$$

În tabelul 15.2 se prezintă valorile accelerațiilor și ale deplasărilor sistemului după fiecare interval de timp.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 15.2

t (s)	x (cm/s²)	x (cm)
0,00	100,00	0,0000
0,02	100,00	0,0200
0,04	68,00	0,0800
0,06	9,52	0,1672
0,08	−132,38	0,2582
0,10	−261,89	0,4021
0,12	−291,08	0,4412
0,14	−225,35	0,3615
0,16	− 72,53	0,1917
0,18	106,39	−0,0071
0,20	246,97	−0,1633
0,22	298,63	−0,2207
0,24	242,74	−0,1586
0,26	99,44	0,0006
0,28	− 79,64	0,1996
0,30	−210,03	0,3667
0,32	−197,62	0,4411
0,34	—	0,3978

În tabelul 15.3 se prezintă valorile deplasărilor sistemului corespunzînd aplicării statice a forței $F(t)$, calculate conform relației

$$x_{st} = F(t)\,\delta.$$

Tabelul 15.3

t (s)	$F(t)$ (daN)	x (cm)
0,00	100	0,1112
0,02	120	0,1334
0,04	140	0,1557
0,06	160	0,1779
0,08	100	0,1112

Scanned with OKEN Scanner

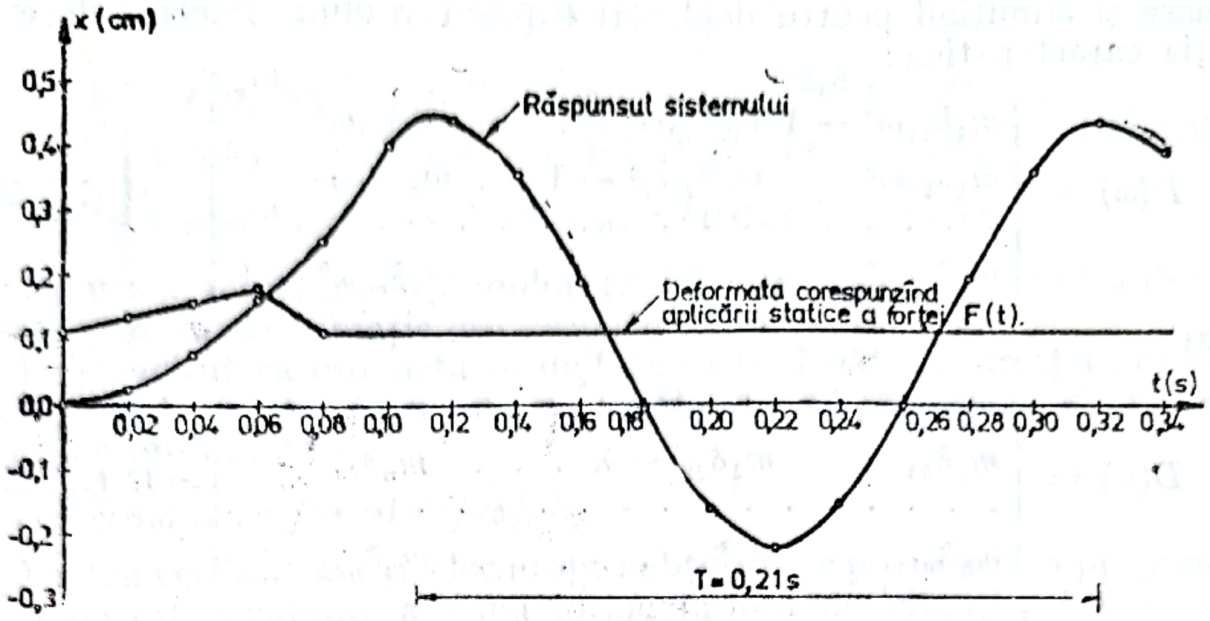


Fig. 15.13

În figura 15.13 s-a reprezentat variația deplasărilor în timp, sub acțiunea forței $F(t)$ descrise în figura 15.11, b. Se regăsește grafic perioada $T \approx 0{,}21$ s și se constată simetria amplitudinii deplasărilor față de deformata corespunzînd aplicării statice a forței $F(t)$ și care este de cca 0,33 cm.

B. SISTEME CU MAI MULTE GRADE DE LIBERTATE

Vibrații libere

Pentru structurile de rezistență ale construcțiilor se admite în general concentrarea maselor în anumite secțiuni, obținînd astfel modele dinamice cu un număr finit de grad de libertate.

În calculul dinamic al structurilor se pot utiliza atît metoda forțelor cît și metoda deplasărilor, în cazul procedeelor exacte de calcul, precum și unele metode numerice (aproximative).

1.a. Utilizarea metodei forțelor.

Se consideră un sistem oscilant cu n grade de libertate. Aplicînd static, asupra sistemului, forțele de inerție corespunzătoare fiecărei

Scanned with OKEN Scanner

mase şi admiţînd pentru deplasări expresii armonice, se obţine ecuaţia caracteristică:

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} m_1\delta_{11}\omega^2 - 1 & m_2\delta_{12}\omega^2 & \dots & m_n\delta_{1n}\omega^2 \\ m_1\delta_{21}\omega^2 & m_2\delta_{22}\omega^2 - 1 & \dots & m_n\delta_{2n}\omega^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1\delta_{n1}\omega^2 & m_2\delta_{2n}\omega^2 & \dots & m_n\delta_{nn}\omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(XV.28)}$$

sau

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} m_1\delta_{11} - \lambda & m_2\delta_{12} & \dots & m_n\delta_{1n} \\ m_1\delta_{21} & m_2\delta_{22} - \lambda & \dots & m_n\delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1\delta_{n1} & m_2\delta_{n2} & \dots & m_n\delta_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(XV.29)}$$

unde $\lambda = \dfrac{1}{\omega^2}$.

Prin dezvoltarea determinantului şi prin calculul rădăcinilor polinomului de gradul n obţinut,

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

se calculează valorile proprii λ_i ale sistemului oscilant şi corespunzător ω_i şi T_i, cu următoarea ordonare:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n,$$

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n,$$

$$T_1 > T_2 > \dots > T_n.$$

Pulsaţia cea mai joasă, ω_1, se numeşte *pulsaţie fundamentală*, iar perioada cea mai mare, $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$, *perioadă fundamentală*.

Fiecărei valori proprii îi corespunde o formă proprie de oscilaţie a sistemului, ambele formînd un ansamblu numit *mod normal* de vibraţie.

Considerînd amplitudinile A_k şi notînd ordonatele unei forme proprii de vibraţie

$$\Phi_{k,i} = \frac{A_{k,i}}{A_{1,i}}, \text{ deci } \Phi_{1,i} = 1, \quad \text{(XV.30)}$$

se poate scrie sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} m_2\delta_{12}\Phi_{2,i} + \ldots + m_n\delta_{1n}\Phi_{n,i} = -(m_1\delta_{11} - \lambda_i) \\ (m_2\delta_{22} - \lambda_i)\Phi_{2,i} + \ldots + m_n\delta_{2n}\Phi_{n,i} = -m_1\delta_{21} \\ m_2\delta_{n2}\Phi_{2,i} + \ldots + (m_n\delta_{nn} - \lambda_i)\Phi_{n,i} = -m_1\delta_{n1} \end{cases} \quad \text{(XV.31)}$$

În urma rezolvării sistemului (XV.31) se determină ordonatele formei proprii de vibrație.

Este indicat ca ordonata — unitate să fie luată pe direcția aceluiași grad de libertate, aceasta permițînd o comparare sugestivă a formelor proprii.

Ortogonalitatea formelor proprii.

Pentru verificarea formelor proprii obținute se poate utiliza proprietatea de ortogonalitate a două forme proprii de vibrație, i și j:

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi_{k,i}\, m_k\, \Phi_{k,j} = 0 \quad \text{(XV.32)}$$

1.b. Utilizarea metodei deplasărilor

Ecuația caracteristică are forma:

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} r_{11} - m_1\omega^2 & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} - m_2\omega^2 & \ldots & r_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots & r_{nn} - m_n\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(XV.33)}$$

Prin dezvoltarea determinantului se obțin cele n rădăcini, precum și pulsațiile proprii ale sistemului:

$$\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n.$$

Formele proprii se calculează la fel ca și în cazul utilizării metodei forțelor.

2. — Metode numerice

2.a. Metoda matriceală iterativă

Pentru determinarea succesivă a tuturor valorilor vectorilor proprii ale unui sistem oscilant cu un număr finit de grade de libertate se procedează astfel:

a. — Se calculează matricea dinamică

$$\mathbf{D} = \delta\mathbf{M}, \quad \text{(XV.34)}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

δ — este matricea de flexibilitate,

$\mathbf{M}$ — este matricea maselor — sau matricea de inerţie —.

b. — Se consideră un vector propriu oarecare Φ^0.

c. — Se premultiplică vectorul ales cu matricea dinamică, obţinîndu-se un alt vector propriu Φ^1

$$\Phi^1 = \mathbf{D}\Phi^0 = \lambda^1\Phi_1. \tag{XV.35}$$

d. — Se procedează succesiv la premultiplicarea vectorilor proprii, pînă cînd factorul de proporţionalitate λ^i devine stabil

$$\Phi^i = \mathbf{D}\Phi^{i-1} = \lambda^i\Phi_1. \tag{XV.36}$$

e. — Se calculează valoarea pulsaţiei fundamentale

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}$$

f. — Pentru calculul celui de al doilea mod de vibraţie se determină matricea de eliminare

$$\mathbf{E}_1 = \begin{vmatrix} 0 & -e_{12}^{(1)} & -e_{13}^{(1)} & \dots & -e_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \tag{XV.37}$$

unde expresia elementelor din prima linie este

$$e_{1,k}^{(1)} = \frac{m_k\Phi_{k,1}}{m_1\Phi_{1,1}} \quad (k = 2, \dots, n) \tag{XV.38}$$

g. — Se calculează matricea dinamică ce corespunde celui de al doilea mod de vibraţie

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{D}\mathbf{E}_1 \tag{XV.39}$$

şi se repetă etapele b, c, d şi e.

h. — Pentru calculul celui de la treilea mod de vibraţie se determină matricea de eliminare

$$\mathbf{E}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -e_{23}^{(2)} & -e_{24}^{(2)} & \dots & -e_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & -e_{13}^{(2)} & -e_{14}^{(2)} & \dots & -e_{1n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \tag{XV.40}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu următoarele expresii pentru elementele din cele două linii:

$$c_{2k}^{(2)} = \frac{m_k}{m_1} \cdot \frac{\Phi_{2,2}\Phi_{k,1} - \Phi_{2,1}\Phi_{k,2}}{\Phi_{1,2}\Phi_{2,1} - \Phi_{1,1}\Phi_{2,2}}, \qquad \text{(XV.41)}$$

$$c_{1k}^{(2)} = \frac{m_k}{m_2} \cdot \frac{\Phi_{1,2}\Phi_{k,1} - \Phi_{1,1}\Phi_{k,2}}{\Phi_{1,2}\Phi_{2,1} - \Phi_{1,1}\Phi_{2,2}}. \qquad \text{(XV.42)}$$

i. — Se calculează matricea dinamică ce corespunde celui de al treilea mod de vibrație

$$\mathbf{D}_3 = \mathbf{D}\mathbf{E}_2 \qquad \text{(XV.43)}$$

și se repetă etapele b, c, d și e.

2.b. — Metoda Holzer.

Pentru structurile fixate la un singur capăt se pot determina modurile de vibrație ale sistemelor cu n grade de libertate după cum urmează:

a. — Se stabilesc mărimile statice de referință:

$$I_0,\ l_0,\ m_0,$$

$$R_0 = \frac{12EI_0}{l_0^3} \text{ și } \alpha_k = \frac{m_k}{m_0}.$$

b. — Se calculează ceoficienții de distribuție pentru stîlpi, considerînd în fiecare nod toate barele incidente

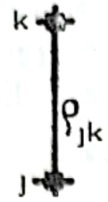
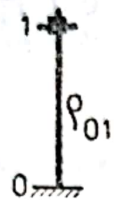
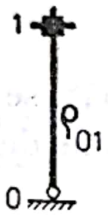
$$\mu_{jk} = \frac{\rho_{jk}}{\sum_j \rho_{jk}}. \qquad \text{(XV.45)}$$

În mod curent coeficienții de distribuție se scriu pe schema structurii, la capetele barelor, iar la mijlocul lor se înscrie produsul $\mu_{jk}\,\mu_{kj}$.

c. — Se calculează pentru fiecare stîlp coeficienții de rigiditate relativă de nivel η_{kj}, conform formulelor din tabelul XV.1 (M. Ifrim):

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul XV.1

Schema de calcul	Expresia coeficientului η_{kj}
	$1 - 0{,}75(\mu_{jk} - \mu_{jk}\mu_{kj} + \mu_{kj})$
	$1 - 0{,}75\mu_{10}$
	$0{,}25(1 - \mu_{10})$

d. — Prin însumare se calculează coeficienţii de rigiditate totală pe nivel.

e. — Pentru determinarea primului mod de vibraţie se alege o valoare iniţială pentru caracteristica de frecvenţă φ_i.

f. — Se stabileşte o valoare pozitivă pentru ordonata formei proprii la ultimul nivel (în mod curent valoarea unitate) şi se aplică succesiv relaţia

$$\Phi_{k,i} = \Phi_{k+1,i} - \frac{\varphi_i}{\eta_{k+1,k}} \sum_{r=k+1}^{n} \alpha_r \Phi_{r,i}. \qquad \text{(XV.46)}$$

Prin corecţii succesive se stabileşte valoarea caracteristicii de frecvenţă φ_1, astfel încît pentru toate ordonatele formei proprii să se obţină valori pozitive, iar ultima valoare să fie nulă ($\Phi_0 \approx 0$).

g. — Pulsaţia proprie se calculează cu relaţia

$$\omega_i = \sqrt{\frac{R_0}{m_0}}\,\varphi_i. \qquad \text{(XV.47)}$$

Scanned with OKEN Scanner

h. — Pentru determinarea celui de al doilea şi al treilea mod de vibraţie se porneşte de la relaţiile aproximative:

$$\omega_2 \approx 2{,}5\omega_1 \text{ şi } \omega_3 \approx 4\omega_1, \tag{XV.48}$$

calculînd caracteristicile de frecvenţă corespunzătoare

$$\varphi_i = \omega_i^2 \frac{m_0}{R_0}. \tag{XV.49}$$

În continuare se repetă operaţiile e şi f, urmărind ca ordonatele celei de a doua forme proprii să aibă o schimbare de semn, ordonatele celei de a treia, două schimbări etc.

2.c. — Metoda masei echivalente.

Pentru structurile a căror configuraţii sînt simple, sistemele cu mai multe grade de libertate se pot reduce la sisteme cu un singur grad de libertate, calculîndu-se valoarea pulsaţiei fundamentale de vibraţie.

Operaţiile ce se efectuează sînt următoarele:

a. — Se calculează deformata statică produsă de încărcările

$$G_k = m_k g, \tag{XV.50}$$

aplicate pe direcţia de oscilaţie, determinînd ordonatele x_k şi ordonata x_e pe direcţia forţei echivalente.

b. — Se calculează masa echivalentă

$$m_e = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2}{x_e^2}. \tag{XV.51}$$

c. — Se calculează săgeata statică x_{st}, produsă de acţiunea forţei echivalente $G_e = m_e g$ aplicată pe direcţia de oscilaţie a masei echivalente.

d. — Se calculează pulsaţia fundamentală

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{x_{st}}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.d. — *Metoda Stodola*

Metoda permite determinarea modului fundamental de vibrație, cît și a modurilor superioare, în acest caz utilizîndu-se proprietatea de ortogonalitate a formelor proprii, conform algoritmului metodei matriceal-iterative.

Pentru obținerea modului fundamental de vibrație (pulsația fundamentală și prima formă proprie), se parcurg următoarele etape:

a. — Se calculează matricea de flexibilitate a structurii, determinînd deplasările unitare δ_{ki}.

b. — Se calculează ordonatele deformatei inițiale

$$x_k^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} F_i^{(0)} \delta_{ki} = g \sum_{i=1}^{n} m_i \delta_{ki}. \qquad \text{(XV.52)}$$

c. — Se calculează forțele de inerție din iterația 1

$$F_k^{(1)} = m_i x_k^{(0)}. \qquad \text{(XV.53)}$$

d. — Încărcînd sistemul cu această forță pe direcția de oscilație a maselor concentrate, se calculează deplasările din prima iterație

$$x_k^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} F_i^{(1)} \delta_{ki}. \qquad \text{(XV.54)}$$

e. — În continuare se procedează similar, calculînd efectiv forțele de inerție $F_k^{(j)}$ și deplasările $x_k^{(j)}$.

f. — Se calculează pulsația fundamentală cu relația

$$\omega_1^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^{(j-1)}}{\sum_{k=1}^{n} x_k^{(j)}}. \qquad \text{(XV.55)}$$

g. — Se consideră exacte rezultatele obținute pentru pulsația proprie și pentru ordonatele formei fundamentale, dacă pentru două iterații succesive

$$\omega_j^2 - \omega_{j-1}^2 \simeq 0. \qquad \text{(XV.56)}$$

Scanned with OKEN Scanner

2.e. — Metoda Rayleigh.

Numită şi metoda energetică, metoda lui Rayleigh permite calcularea pulsaţiei fundamentale, cunoscînd iniţial ordonatele deformatei structurii sub acţiunea forţelor masice aplicate pe direcţiile de oscilaţie. Sînt parcurse următoarele etape:

a. — Se calculează matricea de flexibilitate a structurii, determinînd deplasările unitare δ_{ki}.

b. — Se calculează ordonatele deformatei iniţiale

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta_{ki} = g \sum_{i=1}^{n} m_i \delta_{ki}. \qquad \text{(XV.57)}$$

c. — Se calculează pulsaţia fundamentală

$$\omega_1^2 = g \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2}. \qquad \text{(XV.58)}$$

APLICAŢII

Problema 15.12. Se dă grinda simplu rezemată din figura 15.14 cu masele concentrate $2m$ şi m. Considerînd $m = 80$ daNs²/m şi $EI = 30\,000$ kNm², se cere să se calculeze pulsaţiile vibraţiilor proprii ale grinzii şi să se traseze formele proprii de vibraţie corespunzătoare.

Încărcînd grinda pe rînd cu forţa — unitate acţionînd în dreptul celor două mase concentrate, se trasează diagramele de momente încovoietoare m_1 şi m_2 şi corespunzător lor se calculează deplasările unitare δ_{11}, δ_{12} şi δ_{22}:

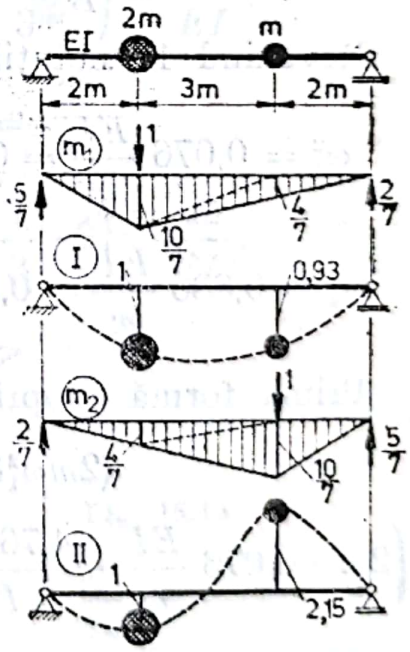


Fig. 15.14

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{10}{7}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{10}{7}+\frac{1}{2}\cdot 5\left(\frac{10}{7}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\right] = \frac{4{,}762}{EI},$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{10}{7}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{10}{7}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{7}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{4}{7}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}+\frac{2}{3}\cdot\frac{10}{7}\right)+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{10}{7}\right] = \frac{3{,}905}{EI}.$$

Determinantul caracteristic este

$$D = \begin{vmatrix} 2m\omega^2\delta_{11}-1 & m\omega^2\delta_{12} \\ 2m\omega^2\delta_{21} & m\omega^2\delta_{22}-1 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$2m^2\omega^4(\delta_{11}^2-\delta_{12}^2) - m\omega^2(2\delta_{11}+\delta_{22}) + 1 = 0.$$

Efectuînd înlocuirile și notînd $B = \frac{m}{EI}$, $r = \omega^2$, se obține ecuația

$$14{,}855B^2r^2 - 14{,}286Br + 1 = 0$$

și soluțiile $r_1 = \frac{0{,}076}{B}$, $r_2 = \frac{0{,}886}{B}$.

Revenind la notațiile anterioare, se obțin pulsațiile proprii:

$$\omega_1^2 = 0{,}076\,\frac{EI}{m} = 0{,}076\,\frac{30000}{80\cdot 10^{-2}} = 2850 \text{ și } \omega_1 = 53 \text{ rad/s},$$

$$\omega_2^2 = 0{,}886\,\frac{EI}{m} = 0{,}886\,\frac{30000}{80\cdot 10^{-2}} = 33225 \text{ și } \omega_2 = 182 \text{ rad/s}.$$

Prima formă proprie se determină din ecuația

$$(2m\omega_1^2\delta_{11}-1)u_{11} + m\omega_1^2\delta_{12}u_{21} = 0,$$

$$\left(2m\cdot 0{,}076\,\frac{EI}{m}\cdot\frac{4{,}762}{EI}-1\right)u_{11} + m\cdot 0{,}076\,\frac{EI}{m}\cdot\frac{3{,}905}{EI}\,u_{21} = 0.$$

Alegînd $u_{11} = 1$, se obține $u_{21} = 0{,}93$.

Scanned with OKEN Scanner

A doua formă proprie se determină din ecuația

$$(2m\omega_2^2\delta_{11} - 1)\,u_{12} + m\omega_2^2\delta_{12}u_{22} = 0,$$

$$\left(2m \cdot 0{,}886\,\frac{EI}{m} \cdot \frac{4{,}762}{EI} - 1\right)u_{12} + m \cdot 0{,}886\,\frac{EI}{m} \cdot \frac{3{,}905}{EI}\,u_{22} = 0.$$

Alegînd $u_{12} = 1$, se obține $u_{22} = -2{,}15$.

Cele două forme proprii de vibrație sînt reprezentate în figura 15.14.

Problema 15.13. Pentru consola verticală din figura 15.15, se cere să se calculeze pulsațiile vibrațiilor proprii și formele proprii de vibrație corespunzătoare. Se dau: $m = 400$ daNs²/m, $EI = 24000$ kNm².

Sistemul are două grade de libertate. Ecuația caracteristică utilizată este

$$D = \begin{vmatrix} m_1\omega^2\delta_{11} - 1 & m_2\omega^2\delta_{12} \\ m_1\omega^2\delta_{21} & m_2\omega^2\delta_{22} - 1 \end{vmatrix} = 0$$

Deplasările unitare sînt:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3EI}\left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 9\right) = \frac{87}{EI},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{24}{EI},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2}\,6 \cdot 6\left(\frac{2}{3} \cdot 9 + \frac{1}{3} \cdot 3\right) = \frac{42}{EI}.$$

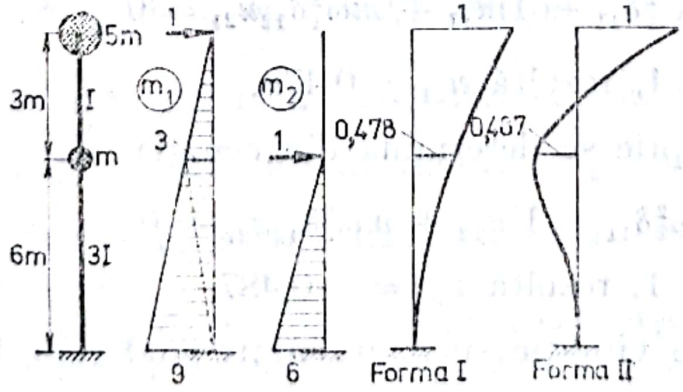


Fig. 15.15

Scanned with OKEN Scanner

Notînd $B = \frac{m}{EI}$, $r = \omega^2$ și introducînd în determinant, se obține

$$\begin{vmatrix} 435rB - 1 & 42rB \\ 210rB & 24rB - 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dezvoltînd determinantul, rezultă ecuația de gradul 2

$$1620B^2r^2 - 459Br + 1 = 0,$$

cu soluțiile:

$$r_1 = \frac{7,12}{2340B} \text{ și } r_2 = \frac{910,88}{3240B}.$$

Revenind la notațiile inițiale se deduce succesiv:

$$\omega_1^2 = \frac{7,12 \cdot 24000}{3240 \cdot 4} = 13,185, \quad \omega_1 = 3,63 \text{ rad/s},$$

$$\omega_2^2 = \frac{910,88 \cdot 24000}{3240 \cdot 4} = 1686,81, \quad \omega_2 = 41,07 \text{ rad/s}.$$

Perioadele vibrațiilor proprii sînt:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 1,731 \text{ s},$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0,153 \text{ s}.$$

Prima formă proprie se determină din ecuația

$$(5m\omega_1^2\delta_{11} - 1)u_{11} + m\omega_1^2\delta_{12}u_{21} = 0.$$

Presupunînd $u_{11} = 1$, rezultă $u_{21} = 0,478$.

A doua formă proprie se determină din ecuația

$$(5m\omega_2^2\delta_{11} - 1)u_{12} + m\omega_2^2\delta_{12}u_{22} = 0.$$

Presupunînd $u_{12} = 1$, rezultă $u_{22} = -0,487$.

Formele proprii de vibrație sînt prezentate în figura 15.15.

Scanned with OKEN Scanner

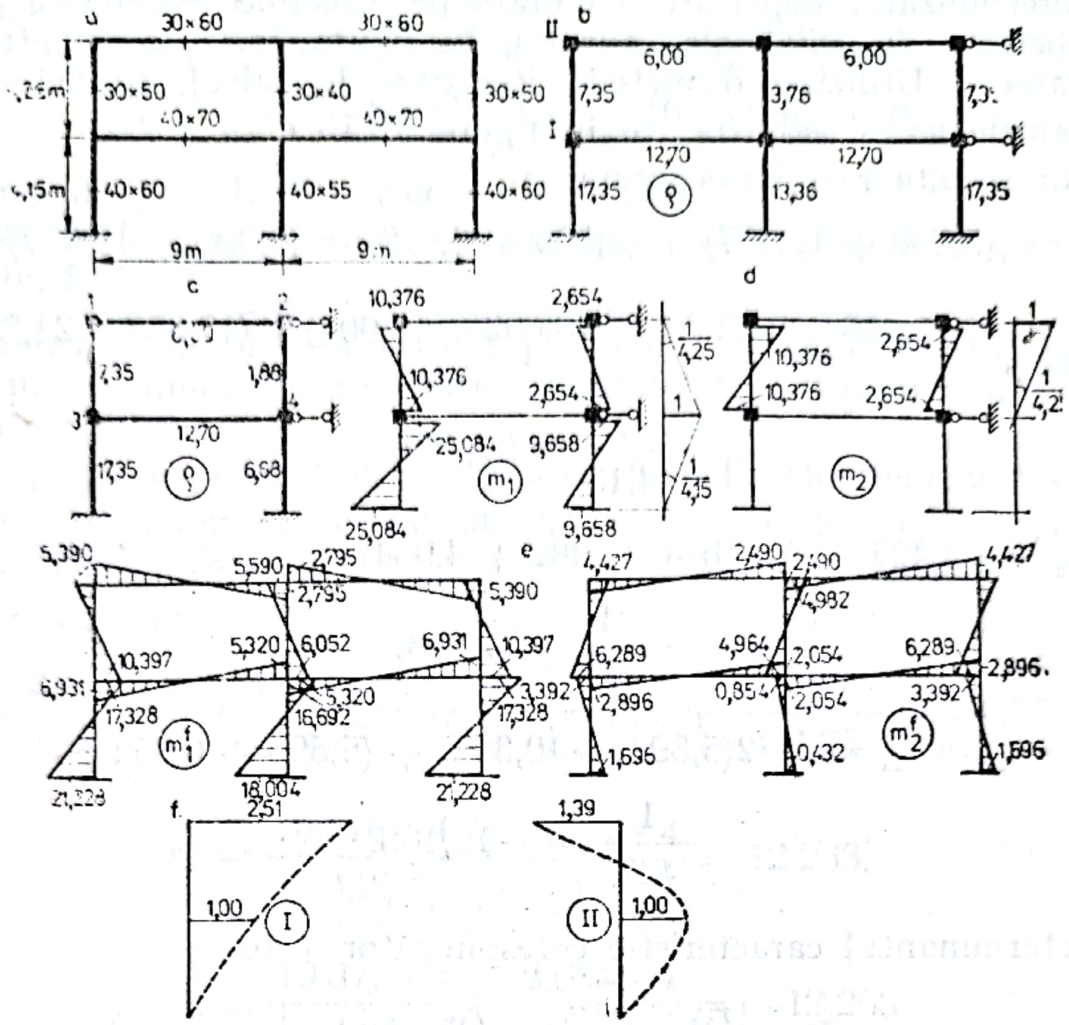


Fig. 15.16

Problema 15.14. Se dă cadrul din beton armat reprezentat în figura 15.16. *a* şi se cere calculul pulsaţiilor vibraţiilor proprii, precum şi trasarea formelor proprii de vibraţie. Se consideră betonul cu $E = 290000$ daN/cm². Se dau masele pe nivele: $m_1 = 138{,}5$ kNs²/m, $m_2 = 39{,}7$ kNs²/m.

Se calculează mai întîi momentele de inerţie ale secţiunilor, în dm⁴, precum şi coeficienţii de rigidităţi $\rho = \frac{EI}{l}$, lungimile barelor fiind considerate în metri. Uniformizarea unităţilor de măsură se va face în final.

Coeficienţii de rigiditate pentru semistructura pe care se conduc calculele sînt trecuţi în figura 15.16, c.

Scanned with OKEN Scanner

Corespunzător deplasărilor unitate pe direcţiile celor două grade de libertate dinamică ale cadrului, în figura 15.16, *d* sînt trasate diagramele. Utilizînd o metodă iterativă de calcul, se determină diagramele m_1^f şi m_2^f, trasate în figura 15.16, e.

Vor rezulta reacţiunile unitare:

$$r_{11} = [(5{,}390 + 10{,}397) + (5{,}590 + 6{,}052) + (5{,}390 + 10{,}397)] \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{4{,}25} + [(17{,}328 + 21{,}228) + (16{,}692 + 18{,}004) + (17{,}328 + 21{,}228)] \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{4{,}15} = 37{,}110,$$

$$r_{22} = [(4{,}427 + 6{,}289) + (4{,}982 + 4{,}964) + (4{,}427 + 6{,}289)] \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{4{,}25} = 7{,}383,$$

$$r_{12} = r_{21} = -[2(5{,}390 + 10{,}397) + (5{,}590 + 6{,}052)] \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{4{,}25} = -10{,}168.$$

Determinantul caracteristic corespunzător este

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} - \omega^2 m_1 & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} =$$

$$= m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 r_{22} + m_2 r_{11})\omega^2 + (r_{11} r_{22} - r_{12}^2) =$$

$$= 5491{,}45\omega^4 - 2495{,}81\omega^2 + 170{,}59 = 0.$$

Pentru a ţine seama de unităţile de măsură în care s-au efectuat calculele, reacţiunile unitare se multiplică cu EI_0, unde $E = 290000 \cdot 10^2$ kNm/m², $I_0 = 10^{-4}$ m⁴, deci $EI_0 = 2900$ kNm².

Pentru pulsaţiile proprii se obţin valorile:

$$\omega_1^2 = 0{,}0838\, EI_0, \qquad \omega_1 = 0{,}2895 \sqrt{EI_0} = 15{,}6 \text{ rad/s},$$

$$\omega_2^2 = 0{,}3701\, EI_0, \qquad \omega_2 = 0{,}6083 \sqrt{EI_0} = 32{,}7 \text{ rad/s}.$$

Prima formă proprie se obţine din ecuaţia

$$(37{,}11 - 0{,}0838 \cdot 138{,}5)u_{11} - 10{,}168 \quad u_{21} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Alegînd $u_{11} = 1$, se obține $u_{21} = 2{,}51$.

A doua formă proprie se obține din ecuația

$$(37{,}11 - 0{,}3701 \cdot 138{,}5)u_{12} - 10{,}168\ u_{22} = 0.$$

Alegînd $u_{12} = 1$, se obține $u_{22} = -1{,}39$.

Cele două forme proprii de vibrație sînt reprezentate în figura 15.16, f.

Observație. Rezolvarea acestei probleme se poate face și acceptînd unele simplificări, exactitatea rezultatelor fiind influențată într-o anumită măsură.

Simplificarea constă în renunțarea la calculele iterative pentru obținerea diagramelor m_i^f și utilizarea diagramelor m_i la calculul reacțiunilor unitare r_{ij}.

Vor rezulta:

$$r_{11}^* = \frac{2{,}654 \cdot 4}{4{,}25} + \frac{9{,}658 \cdot 4}{4{,}25} + \frac{10{,}376 \cdot 4}{4{,}25} + \frac{21{,}084 \cdot 4}{4{,}25} = 45{,}750,$$

$$r_{22}^* = \frac{10{,}376 \cdot 4}{4{,}25} + \frac{2{,}654 \cdot 4}{4{,}25} = 12{,}263,$$

$$r_{12}^* = -\frac{10{,}376 \cdot 4}{4{,}25} - \frac{2{,}654 \cdot 4}{4{,}25} = -12{,}263.$$

Determinantul caracteristic este

$$D = m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 r_{22} + m_2 r_{11})\omega^2 + (r_{11} r_{22} - r_{12}^2) =$$

$$= 5498{,}45\omega^4 - 3514{,}7\omega^2 + 410{,}65 = 0.$$

Pentru pulsațiile proprii se obțin valorile:

$$(\omega_1^*)^2 = 0{,}1539 EI_0 \qquad \omega_1^* = 21{,}12 \text{ rad/s},$$

$$(\omega_2^*)^2 = 0{,}4853 EI_0, \qquad \omega_2^* = 37{,}51 \text{ rad/s}.$$

Față de valorile exacte ($\omega_1 = 15{,}6$ rad/s și $\omega_2 = 32{,}7$ rad/s) s-au obținut sporuri de 35% și respectiv 13%, acestea constituind valori acoperitoare în calcul la solicitările seismice, care utilizează pulsațiile proprii.

Scanned with OKEN Scanner

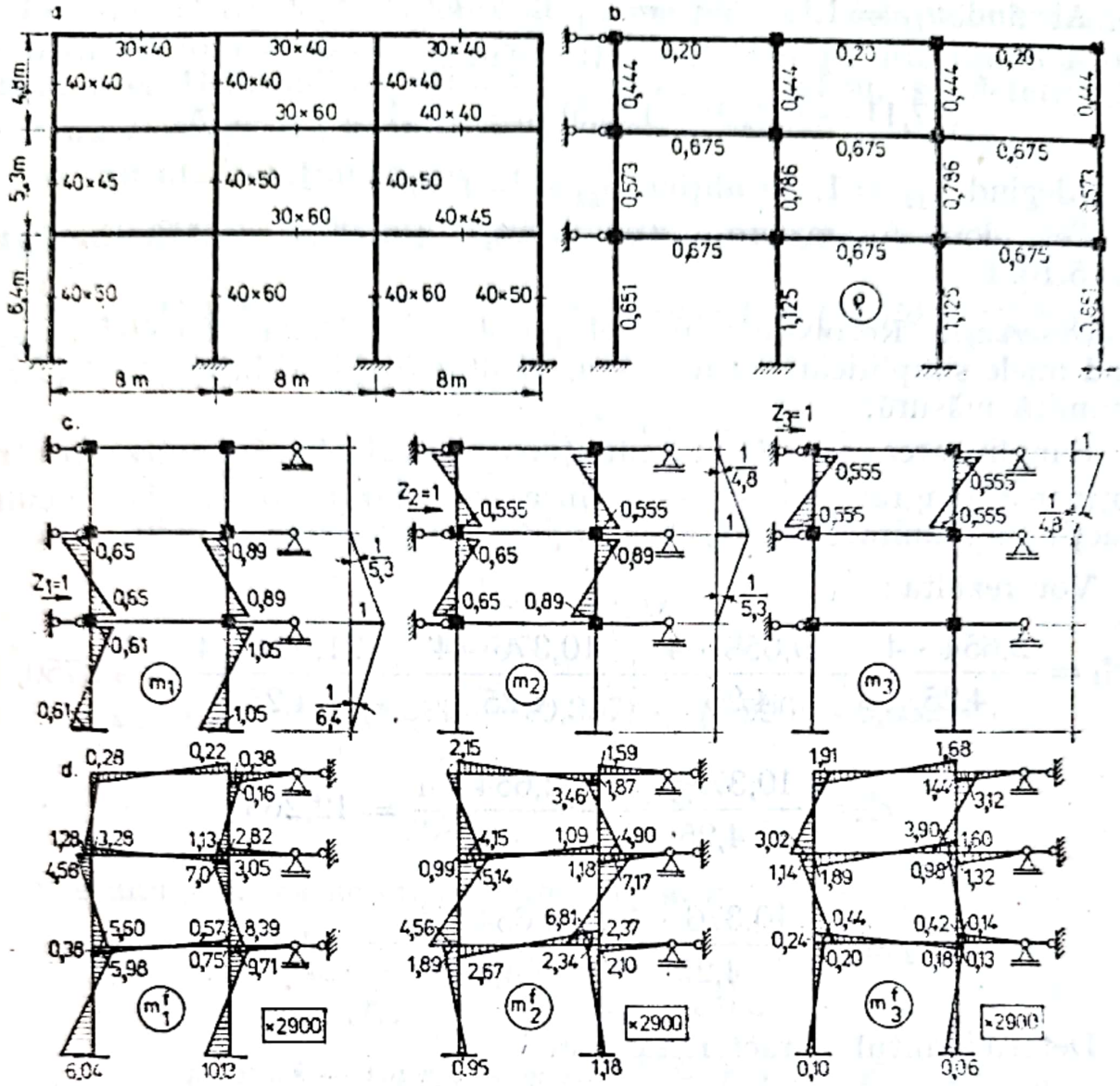


Fig. 15.17

Problema 15.15. Se dă cadrul din beton armat din fogura 15.17 şi se cere să se calculeze pulsaţiile vibraţiilor proprii utilizînd: metoda matriceală iterativă, metoda Holzer, metoda masei echivalente, metoda Stodola şi metoda Rayleigh. Se dau: $m_1 = 160$ kNs²/m, $m_2 = 120$ kNs²/m, $m_3 = 80$ kNs²/m, $E_b = 290000$ daN/cm².

Metoda matriceală iterativă.

Se vor utiliza proprietăţile de rigiditate ale structurii. În acest sens au fost calculate diagramele de momente încovoietoare produse de încărcarea cu deplasări-unitate pe direcţiile gradelor de libertate

Scanned with OKEN Scanner

dinamică. Aceste diagrame, notate m_1^I, m_2^I și m_3^I, sînt date direct în figura 15.17 (pe semistructură).

Reacțiunile din legăturile de grad de libertate sînt:

$$r_{11} = 2900 \left[2 \cdot \frac{1}{5,3} (4,56 + 5,60 + 7,00 + 8,39) + \right.$$

$$\left. + 2 \cdot \frac{1}{6,4} (5,98 + 6,04 + 9,71 + 10,13) \right] = 56833,50,$$

$$r_{22} = 2900 \left[2 \cdot \frac{1}{4,8} (2,15 + 4,15 + 3,46 + 4,90) + \right.$$

$$\left. + 2 \cdot \frac{1}{5,3} (5,14 + 4,56 + 7,17 + 6,81) \right] = 43617,20,$$

$$r_{33} = 2900 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4,8} (1,91 + 3,02 + 3,12 + 3,90) = 14439,58,$$

$$r_{21} = -2900 \left[2 \cdot \frac{1}{4,8} (0,28 + 1,28 + 0,38 + 1,13) + \right.$$

$$\left. + 2 \cdot \frac{1}{5,3} (4,56 + 5,6 + 7,0 + 8,39) \right] = 31657,9,$$

$$r_{31} = 2900 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4,8} (0,28 + 1,28 + 0,38 + 1,13) = 3709,58,$$

$$r_{22} = -2900 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4,8} (2,15 + 4,15 + 3,46 + 4,90) = -17714,20.$$

Ecuația caracteristică are forma matriceală $|\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0$, sau dezvoltată

$$\begin{vmatrix} 19,60 - \omega^2 \dfrac{160}{2900} & -10,92 & 1,279 \\ -10,92 & 15,04 - \omega^2 \dfrac{120}{2900} & -6,11 \\ 1,279 & -6,11 & 4,98 - \omega^2 \dfrac{80}{2900} \end{vmatrix} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Notînd $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$, rezultă $|\mathbf{k}^{-1}\mathbf{M} - \lambda| = 0$, unde:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 160 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}^{-1} = \frac{1}{2900} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}1302 & -0{,}1614 & 0{,}1645 \\ -0{,}1614 & 0{,}3326 & -0{,}3666 \\ 0{,}1645 & -0{,}3666 & 0{,}6083 \end{bmatrix}$$

Produsul $\mathbf{k}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{D}$ reprezintă matricea dinamică și are forma

$$\mathbf{D} = 10^{-2} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}718 & 0{,}667 & 0{,}454 \\ 0{,}889 & 1{,}374 & 1{,}009 \\ 0{,}908 & 1{,}514 & 1{,}678 \end{bmatrix}$$

Ecuația caracteristică este

$$|\mathbf{D} - \lambda| = 0.$$

Pentru calculul primei valori proprii se alege un vector oarecare, de exemplu

$$\mathbf{V}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calculul iterativ constă în premultiplicarea succesivă cu matricea dinamică $\mathbf{D}$, a vectorului din ciclul precedent. După un număr de cicluri se efectuează raportul a doi vectori succesivi, de unde se obține prima valoare proprie a matricei $\mathbf{D}$.

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{D}\mathbf{V}_0 = 10^{-2} \cdot \begin{bmatrix} 3{,}414 \\ 6{,}664 \\ 8{,}963 \end{bmatrix} = 8{,}963 \cdot 10^{-2} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}380 \\ 0{,}743 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{D}\mathbf{V}_1 = 2{,}819 \cdot 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}388 \\ 0{,}783 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{D}\mathbf{V}_2 = 8{,}93 \cdot 10^{-5} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}390 \\ 0{,}754 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\mathbf{V}_4 = \mathbf{D}\mathbf{V}_3 = 2{,}832 \cdot 10^{-8} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}390 \\ 0{,}754 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Făcînd raportul a două elemente corespunzătoare ale vectorilor $\mathbf{V}_4$ și $\mathbf{V}_3$, rezultă $\lambda_1 = 3{,}171 \cdot 10^{-2}$, prima valoare proprie a matricei $\mathbf{D}$. Deoarece $\lambda = \dfrac{1}{\omega^2}$, se obține

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} = 5{,}61 \text{ 1/s} \quad \text{și} \quad T_1 = 1{,}118 \text{ s},$$

iar vectorul propriu Φ_1 are forma

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0{,}390 \\ 0{,}754 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pentru obținerea celei de a doua valori proprii și a vectorului propriu asociat, se determină matricea de eliminare.

Elementele e_{12} și e_{13} ale acestei matrice sînt:

$$e_{12} = -\frac{m_2 \Phi_{2,1}}{m_1 \Phi_{1,1}} = -\frac{120 \cdot 0{,}754}{160 \cdot 0{,}390} = -1{,}45,$$

$$e_{13} = -\frac{m_3 \Phi_{3,1}}{m_1 \Phi_{1,1}} = -\frac{80 \cdot 1{,}0}{160 \cdot 0{,}390} = -1{,}282,$$

iar matricea de eliminare are forma

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1{,}45 & -1{,}282 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matricea dinamică, pentru obținerea celui de al doilea mod de vibrație, este

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{D}\mathbf{E}_1 = 10^{-2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -0{,}374 & -0{,}466 \\ 0 & 0{,}085 & -0{,}131 \\ 0 & 0{,}197 & 0{,}512 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

În continuare, se utilizează aceeași metodologie ca și pentru calculul primei valori proprii. Vectorul propriu inițial ales este

$$\mathbf{V}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Calculul iterativ conduce la următoarele rezultate:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{D}_2\mathbf{V}_0 = 10^{-2} \cdot \begin{bmatrix} -1{,}306 \\ -0{,}177 \\ 1{,}221 \end{bmatrix} = 1{,}221 \cdot 10^{-2} \cdot \begin{bmatrix} -1{,}070 \\ -0{,}145 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{D}_2\mathbf{V}_1 = 0{,}590 \cdot 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} -0{,}805 \\ -0{,}296 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{D}_2\mathbf{V}_2 = 0{,}2678 \cdot 10^{-6} \cdot \begin{bmatrix} -0{,}782 \\ -0{,}344 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_4 = \mathbf{D}_2\mathbf{V}_3 = 0{,}1189 \cdot 10^{-8} \cdot \begin{bmatrix} -0{,}759 \\ -0{,}360 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_5 = \mathbf{D}_2\mathbf{V}_4 = 0{,}524 \cdot 10^{-9} \cdot \begin{bmatrix} -0{,}750 \\ -0{,}367 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A doua valoare proprie este $\lambda_2 = 0{,}441 \cdot 10^{-2}$. Din relația $\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}$, rezultă:

$$\omega_2 = 15{,}06 \text{ 1/s}, \quad T_2 = 0{,}417 \text{ s} \quad \text{și} \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} -0{,}750 \\ -0{,}367 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Metoda Holzer.

Se stabilesc mărimile de referință:

$$I_0 = 1 \text{ dm}^4, \; l_0 = 1 \text{ dm}, \; R_0 = \frac{12\,EI_0}{l_0^3}, \; m_0 = 80\,\frac{\text{kNs}^2}{\text{m}}, \; \lambda_{kj} = \frac{l_{kj}}{l_0},$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru a putea exprima valoarea caracteristică de frecvență

$$\varphi_i = \omega_i^2 \frac{m_0}{R_0}.$$

Coeficienții de rigiditate relativă, η, se calculează conform relațiilor din tabelul XV.1.

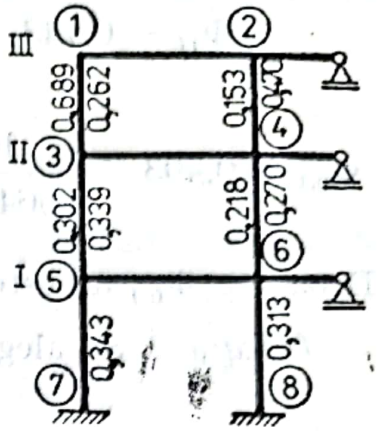


Fig. 15.18

$$\eta_{13} = \frac{0,444}{48^2} \cdot [1 - 0,75(0,689 + 0,262 - 0,180)] = 0,813 \cdot 10^{-4},$$

$$\eta_{35} = \frac{0,573}{53^2} \cdot [1 - 0,75(0,339 + 0,302 - 0,102)] = 1,215 \cdot 10^{-4},$$

$$\eta_{57} = \frac{0,651}{64^2} \cdot (1 - 0,75 \cdot 0,343) = 1,18 \cdot 10^{-4},$$

$$\eta_{24} = \frac{0,444}{48^2} \cdot [1 - 0,75(0,47 + 0,153 - 0,072)] = 1,13 \cdot 10^{-4},$$

$$\eta_{46} = \frac{0,786}{53^2} \cdot [1 - 0,75(0,27 + 0,218 - 0,0588)] = 1,90 \cdot 10^{-4},$$

$$\eta_{68} = \frac{1,125}{64^2} \cdot (1 - 0,75 \cdot 0,313) = 2,102 \cdot 10^{-4}.$$

Coeficienții de rigiditate totală pe nivel sînt:

$$\eta_{I} = 2(1,180 + 2,102) \cdot 10^{-4} = 6,564 \cdot 10^{-4},$$

$$\eta_{II} = 2(1,215 + 1,90) \cdot 10^{-4} = 6,23 \cdot 10^{-4},$$

$$\eta_{III} = 2(0,813 + 1,130) \cdot 10^{-4} = 3,886 \cdot 10^{-4}.$$

Calculul primei forme proprii de vibrație se face alegînd pentru φ_1 o valoare astfel încît toate elementele vectorului propriu Φ_1 să fie pozitive, $\varphi_1 = 10^{-4}$.

Iterația 1

$$\Phi_{3,1} = 1,$$

$$\Phi_{2,1} = 1 - \frac{10^{-4}}{3,886 \cdot 10^{-4}} (1 \cdot 1) = 0,743,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\Phi_{11} = 0{,}743 - \frac{10^{-4}}{6{,}23 \cdot 10^{-4}}(1 + 1{,}5 \cdot 0{,}743) = 0{,}403,$$

$$\Phi_{0,1} = 0{,}403 - \frac{10^{-4}}{6{,}564 \cdot 10^{-4}}(1 + 1{,}5 \cdot 0{,}743 + 2 \cdot 0{,}403) = -0{,}103.$$

Deoarece $\Phi_{0,1}$ nu este egal cu zero, se ia o nouă valoare pentru φ_1.

Iterația 2 Se alege $\varphi_1 = 0{,}9 \cdot 10^{-4}$.

$$\Phi_{3,1} = 1,$$

$$\Phi_{2,1} = 1 - \frac{0{,}9}{3{,}886}(1 \cdot 1) = 0{,}768,$$

$$\Phi_{1,1} = 0{,}768 - \frac{0{,}9}{6{,}23}(1 + 1{,}5 \cdot 0{,}768) = 0{,}457,$$

$$\Phi_{0,1} = 0{,}457 - \frac{0{,}9}{6{,}564}(1 + 1{,}5 \cdot 0{,}768 + 2 \cdot 0{,}457) = 0{,}0366$$

Iterația 3 Se alege $\varphi_1 = 0{,}96 \cdot 10^{-4}$.

$$\Phi_{3,1} = 1,$$

$$\Phi_{2,1} = 1 - \frac{0{,}96}{3{,}886}(1 \cdot 1) = 0{,}753$$

$$\Phi_{1,1} = 0{,}753 - \frac{0{,}96}{6{,}23}(1 + 1{,}5 \cdot 0{,}753) = 0{,}425$$

$$\Phi_{0,1} = 0{,}425 - \frac{0{,}96}{6{,}564}(2{,}129 + 2 \cdot 0{,}425) = -0{,}010$$

Se reține ca valoare $\varphi_1 = 0{,}956 \cdot 10^{-4}$

Pulsația modului fundamental de vibrație și perioada, sînt:

$$\omega_1 = \sqrt{\varphi_1 \frac{R_0}{m_0}} = \sqrt{0{,}956 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{12 \cdot 2{,}9 \cdot 10^5 \cdot 1}{1^3 \cdot 80 \cdot 10^{-1}}} = 6{,}448 \text{ 1/s},$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0{,}974 \text{ s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru determinarea celorlalte moduri proprii de vibrație se au în vedere relațiile aproximative:

$$\omega_2 \simeq 2{,}5\,\omega_1 = 16{,}12,$$

$$\omega_3 \simeq 4\omega_1 = 25{,}79.$$

Acestor două valori proprii ale pulsațiilor le corespund următoarele valori caracteristice:

$$\varphi_2 = \omega_2^2 \frac{m_0}{R_0} = 16{,}12^2 \cdot \frac{8}{12 \cdot 2{,}9 \cdot 10^{-5}} = 5{,}974 \cdot 10^{-4},$$

$$\varphi_3 = \omega_3^2 \frac{m_0}{R_0} = 25{,}79^2 \cdot \frac{8}{12 \cdot 2{,}9 \cdot 10^{-5}} = 15{,}29 \cdot 10^{-4}.$$

Modul 2 de vibrație

Iterația 1 Se alege $\varphi_2 = 6 \cdot 10^{-4}$.

$$\Phi_{3,1} = 1,$$

$$\Phi_{2,1} = 1 - \frac{6}{3{,}886} \cdot 1 \cdot 1 = -0{,}544,$$

$$\Phi_{1,1} = -0{,}544 - \frac{6}{6{,}23}(1 - 1{,}5 \cdot 0{,}544) = -0{,}721,$$

$$\Phi_{0,1} = -0{,}721 - \frac{6}{6{,}564}(1 - 1{,}5 \cdot 0{,}544 - 2 \cdot 0{,}721) = 0{,}429.$$

Iterația 2 Se alege $\varphi_2 = 5 \cdot 10^{-4}$.

$$\Phi_{3,1} = 1,$$

$$\Phi_{2,1} = 1 - \frac{5}{3{,}886} \cdot 1 \cdot 1 = -0{,}287,$$

$$\Phi_{1,1} = -0{,}287 - \frac{5}{6{,}23}(1 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}287) = -0{,}744.$$

$$\Phi_{0,1} = -0{,}744 - \frac{5}{6{,}564}(1 - 1{,}5 \cdot 0{,}287 - 2 \cdot 0{,}744) = -0{,}044.$$

Scanned with OKEN Scanner

Iterația 3 Se alege $\varphi_2 = 5{,}2 \cdot 10^{-4}$:

$$\Phi_{3,1} = 1,$$

$$\Phi_{2,1} = 1 - \frac{5{,}2}{3{,}886} \cdot 1 \cdot 1 = -0{,}338,$$

$$\Phi_{1,1} = -0{,}338 - \frac{5{,}2}{6{,}23}(1 - 1{,}5 \cdot 0{,}338) = -0{,}750,$$

$$\Phi_{0,1} = -0{,}750 - \frac{5{,}2}{6{,}564}(1 - 1{,}5 \cdot 0{,}338 - 2 \cdot 0{,}750) = 0{,}048.$$

Se reține valoarea finală $\varphi_2 = 5{,}1 \cdot 10^{-4}$ și rezultă:

$$\omega_2 = \sqrt{\varphi_2 \frac{R_0}{m_0}} = \sqrt{5{,}1 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{12 \cdot 2{,}9 \cdot 10^{-5}}{8}} = 14{,}98 \text{ 1/s},$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0{,}42 \text{ s}.$$

Metoda masei echivalente se utilizează pentru determinarea rapidă și cu aproximație satisfăcătoare a pulsației fundamentale de vibrație. În figura 15.19 se prezintă ordonatele maselor, măsurate de la nivelul secțiunii de rezemare.

Presupunînd că masa echivalentă este amplasată la extremitatea superioară a structurii, $x_e = 16{,}5$ m, se obține:

$$m_e = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2}{e^2} = \frac{160 \cdot 6{,}4^2 + 120 \cdot 11{,}7^2 + 80 \cdot 16{,}5^2}{16{,}5^2} =$$

$$= 164{,}41 \text{ kNs}^2/\text{m}.$$

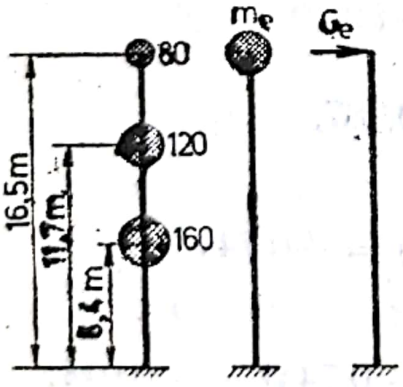


Fig. 15.19

Adoptînd pentru pulsația vibrațiilor proprii expresia

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{x_{st}}},$$

unde $x_{st} = G_e \delta$, iar $G_e = m_e g$, rezultă:

$$G_e = 164{,}41 \cdot 9{,}81 = 1612{,}86 \text{ kN},$$

Scanned with OKEN Scanner

$$x_{st} = G_e \frac{1}{r_{33}} = \frac{1612,86}{14439,58} = 0,1117 \text{ m},$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{9,81}{0,1117}} = 9,37 \text{ 1/s},$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 1,05 \text{ s}.$$

Observație. Valoarea deplasării unitare δ s-a determinat cu relația $\delta = \frac{1}{r_{33}}$, unde rigiditatea r_{33} a fost calculată la metoda matriceală.

Metoda Stodola. Pentru calculul deplasărilor inițiale se consideră forțele gravitaționale de nivel aplicate ca forțe orizontale pe structură;

$$x_k^0 = g \sum_{i=1}^{n} m_i \delta_{ki}.$$

Cu elementele stabilite la metoda matriceală, rezultă:

$$x_1^0 = g \cdot 10^{-2}(0,718 + 0,667 + 0,454) = 0,1804 \text{ m},$$

$$x_2^0 = g \cdot 10^{-2}(0,889 + 1,374 + 1,009) = 0,231 \text{ m},$$

$$x_3^0 = g \cdot 10^{-2}(0,908 + 1,514 + 1,678) = 0,4022 \text{ m}.$$

În prima iterație se vor considera următoarele forțe de inerție:

$$F_1^{(1)} = m_1 x_1^0 = 160 \cdot 0,1804 = 28,864 \text{ kN},$$

$$F_2^{(1)} = m_2 x_2^0 = 120 \cdot 0,321 = 38,52 \text{ kN},$$

$$F_3^{(1)} = m_3 x_3^0 = 80 \cdot 0,4022 = 32,176 \text{ kN}.$$

Încărcînd structura cu aceste forțe, aplicate orizontal, se obțin următoarele deplasări:

$$x_k^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} F_i^{(1)} \delta_{ki},$$

$$x_1^{(1)} = \frac{28,864}{56833,5} + \frac{38,52}{31656,9} + \frac{32,176}{3709,59} = 0,0104 \text{ m},$$

Scanned with OKEN Scanner

$$x_2^{(1)} = \frac{28{,}864}{31656{,}9} + \frac{38{,}52}{43617{,}2} + \frac{32{,}176}{17714{,}2} = 0{,}0036 \text{ m},$$

$$x_3^{(1)} = \frac{28{,}864}{3709{,}58} + \frac{38{,}52}{17714{,}2} + \frac{32{,}176}{14439{,}58} = 0{,}0122 \text{ m}.$$

Pulsația fundamentală se determină cu relația

$$\omega_1^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^0}{\sum_{k=1}^{n} x_k^{(1)}} = \frac{0{,}9036}{0{,}0262}, \quad \omega_1 = 5{,}872 \text{ 1/s},$$

iar apoi rezultă perioada

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 1{,}07 \text{ s}.$$

Se obține o bună aproximație chiar după prima iterație.

Metoda Rayleigh. Utilizînd ordonatele deformatei inițiale calculate la punctul anterior, se alcătuiește tabelul 15.4.

Tabelul 15.4

Nivel	m_k	x_k	x_k^2	$m_k x_k$	$m_k x_k^2$
1	160	0,1804	0,03254	28,864	5,2070
2	120	0,3210	0,1030	38,520	12,3650
3	80	0,4022	0,1617	32,176	12,9412
		Σ		99,560	30,4832

Pulsația fundamentală se determină cu relația

$$\omega_1^2 = g \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k^0} = \frac{9{,}81 \cdot 99{,}56}{30{,}4832} = 32{,}04,$$

de unde

$$\omega_1 = 5{,}66 \text{ 1/s},$$

Scanned with OKEN Scanner

iar

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 1{,}11 \text{ s.}$$

Comparînd rezultatele obținute, prin cele cinci metode de calcul, rezultă diferențele din tabelul 15.5.

Tabelul 15.5

Metoda	T_1	Diferența %
Matriceală iterativă	1,118	0,0
Holzer	0,974	−13
Masei echivalente	1,050	−6
Stodola	1,070	−4,3
Rayleigh	1,110	−0,7

Problema 15.16. Se dă cadrul de beton armat din figura 15.20,a, cu $E_b = 270000$ daN/cm² (B250) și cu forțele gravitaționale pe nivele: $G_1 = 800$ kN, $G_2 = 500$ kN, ($G = mg$). Să se efectueze:
a) Calculul pulsațiilor proprii, a perioadelor proprii de vibrație.
b) Calculul caracteristicilor proprii de vibrație, utilizînd rigiditățile relative de nivel.
c) Calculul caracteristicilor fundamentale de vibrație, utilizînd metode numerice aproximative; metoda masei echivalente, metoda Rayleigh, metoda Stodola.

a) Rezolvarea problemei se face folosind metoda deplasărilor. Momentele de inerție ale barelor sînt:

$$I_{s1} = \frac{3 \cdot 6^3}{12} = 54 \text{ dm}^4, \quad I_{s2} = \frac{3 \cdot 5^3}{12} = 31{,}25 \text{ dm}^4,$$

$$I_{s3} = \frac{3 \cdot 5{,}5^3}{12} = 41{,}59 \text{ dm}^4, \quad I_{s4} = \frac{3 \cdot 4^3}{12} = 16 \text{ dm}^4,$$

$$I_{r1} = \frac{3 \cdot 7^3}{12} = 85{,}75 \text{ dm}^4, \quad I_{r2} = \frac{3 \cdot 6^3}{12} = 54 \text{ dm}^4.$$

Considerînd lungimile barelor în dm, coeficienții de rigiditate ai barelor $\rho = \frac{EI}{l}$, pentru $E_b = 1$, sînt dați în figura 15.20, b. Semistructura pe care sînt conduse calculele este dată în figura 15.20, c,

Scanned with OKEN Scanner

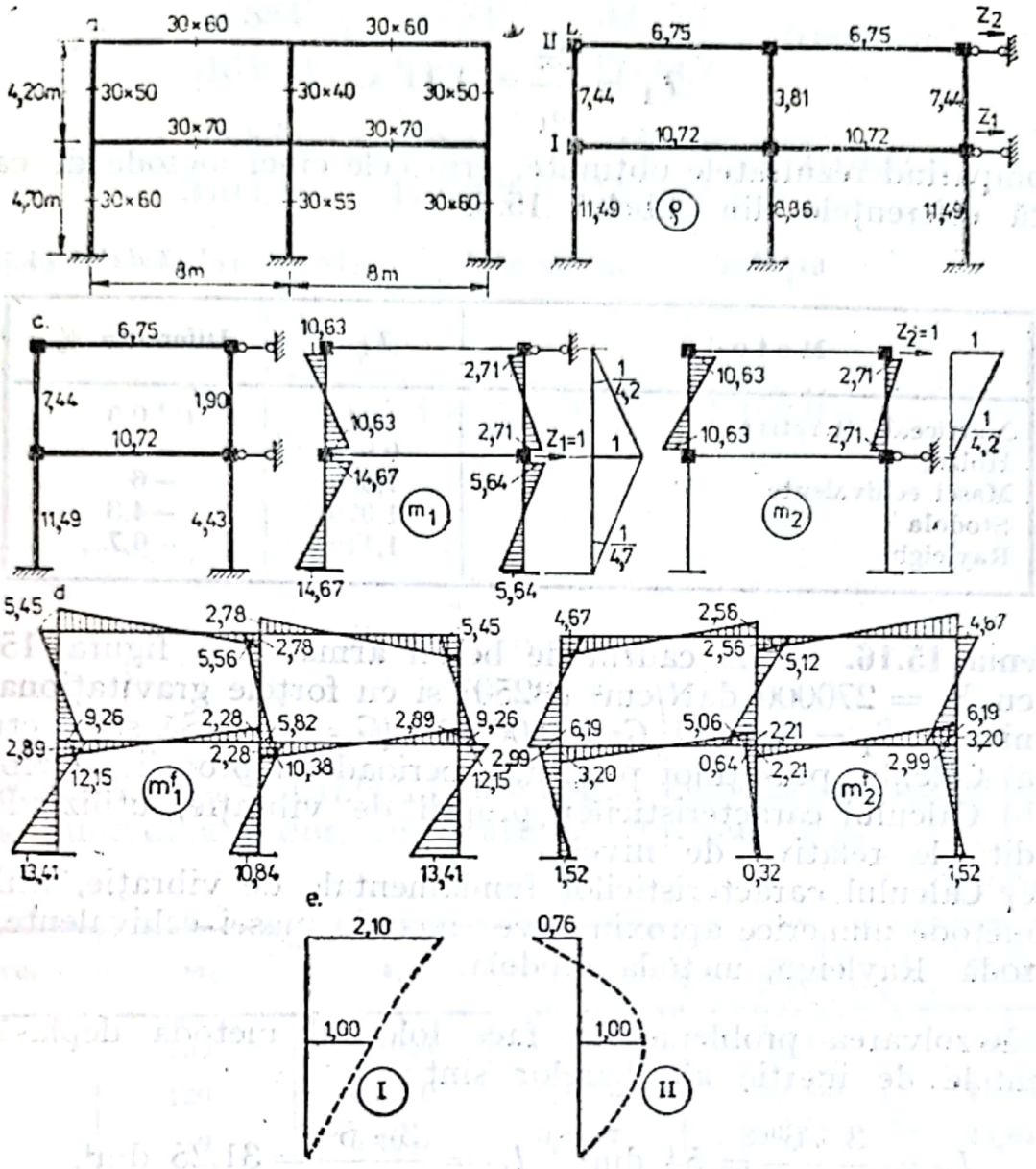


Fig. 15.20

împreună cu diagramele unitare m_1 și m_2, pe sistemul de bază, datorate deplasărilor $Z_1 = 1$ și $Z_2 = 1$, pe direcțiile gradelor de libertate. În figura 15.20, d, sînt prezentate diagramele m_1^f și m_2^f trasate pe cadrul cu noduri fixe încărcat cu deplasările $Z_1 = 1$ și $Z_2 = 1$. Rigiditățile corespunzînd acestor deplasări sînt:

$$r_{11} = [(5{,}45 + 9{,}26) \cdot 2 + (5{,}56 + 5{,}82)] \cdot \frac{1}{4{,}2} + [(12{,}15 + 13{,}41) \cdot 2 + (10{,}38 + 10{,}84) \cdot \frac{1}{4{,}7} = 25{,}11,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$r_{22} = [(4{,}67 + 6{,}19) \cdot 2 + (5{,}12 + 5{,}06)] \cdot \frac{1}{4{,}2} = 7{,}59,$$

$$r_{12} = r_{21} = -[(5{,}45 + 9{,}26) \cdot 2 + (5{,}56 + 5{,}82)] \cdot \frac{1}{4{,}2} = -9{,}71.$$

Modulul de referință EI_0 care multiplică rigiditățile r_{ij}, cu $I_0 = 10^{-4}$ m, este $EI_0 = 270000 \cdot 10^2 \cdot 10^{-4} = 2700$ kNm². Masele sînt $m_1 = 81{,}55$ kNs²/m, $m_2 = 50{,}97$ kNs²/m.

Determinantul caracteristic al sistemului cu două grade de libertate este

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} - \omega^2 m_1 & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} =$$

$$= m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 r_{22} + m_2 r_{11})\omega^2 + (r_{11} r_{22} - r_{12}^2) =$$

$$= 4156{,}6\omega^4 - 1898{,}8 EI_0 \omega^2 + 96{,}3 (EI_0)^2 = 0.$$

Pentru pulsațiile proprii se obțin valorile:

$$\omega_1^2 = 0{,}058\ EI_0, \quad \omega_1 = 0{,}241 \sqrt{EI_0} = 12{,}52 \text{ rad/s},$$

$$\omega_2^2 = 0{,}399\ EI_0, \quad \omega_2 = 0{,}631 \sqrt{EI_0} = 32{,}79 \text{ rad/s}.$$

Perioadele proprii sînt: $T_1 = 0{,}50$ s, $T_2 = 0{,}19$ s.

Prima formă proprie de vibrație se obține din ecuația

$$(r_{11} - \omega_1^2 m_1) u_{11} + r_{12} u_{21} = (25{,}11 - 0{,}058 \cdot 81{,}55) u_{11} - 9{,}71 u_{21} = 0.$$

Alegînd $u_{11} = 1$, se obține $u_{21} = 2{,}10$.

A doua formă proprie de vibrație se obține din ecuația

$$(25{,}11 - 0{,}399 \cdot 81{,}55) u_{12} - 9{,}71 u_{22} = 0.$$

Alegînd $u_{12} = 1$, se obține $u_{22} = -0{,}76$.

Cele două forme proprii de vibrație sînt reprezentate în figura 15.20,e.

b) Calculul rigidităților r_{ij}, prin utilizarea rigidităților relative de nivel, se face cu ajutorul diagramelor m_1 și m_2 din figura 15.23, c:

$$r_{11} = [2(10{,}63 + 10{,}63) + 2(2{,}71 + 2{,}71)] \cdot \frac{1}{4{,}2} +$$

$$+ [2(14{,}67 + 14{,}67) + 2(5{,}64 + 5{,}64)] \cdot \frac{1}{4{,}7} = 29{,}99,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$r_{22} = [2(10{,}63 + 10{,}63) + 2(2{,}71 + 2{,}71)] \cdot \frac{1}{4{,}2} = 12{,}70,$$

$$r_{12} = r_{21} = -[2 \cdot (10{,}63 + 10{,}63) + 2(2{,}71 + 2{,}71)] \cdot \frac{1}{4{,}2} = -12{,}70.$$

Determinantul caracteristic este, în acest caz

$$4156{,}6\,\omega^4 - 2564{,}3\,EI_0\omega^2 + 219{,}6\,(EI_0)^2 = 0.$$

Pentru pulsaţiile proprii se obţin valorile:

$$\omega_1^2 = 0{,}103\,EI_0, \quad \omega_1 = 0{,}320\,\sqrt{EI_0} = 16{,}63 \text{ rad/s},$$

$$\omega_2^2 = 0{,}514\,EI_0, \quad \omega_2 = 0{,}717\,\sqrt{EI_0} = 37{,}26 \text{ rad/s}.$$

Perioadele proprii sînt: $T_1 = 0{,}38$ s, $T_2 = 0{,}17$ s.

Pentru formele proprii de vibraţie se obţin valorile:

$$\text{Forma I}: \quad u_{11} = 1, \quad u_{21} = 1{,}70,$$

$$\text{Forma II}: \quad u_{12} = 1, \quad u_{22} = -0{,}94.$$

În tabelul 15.6 se dau comparativ caracteristicile de vibraţie obţinute în cazul calculului exact şi în cazul calculului utilizînd rigidităţile relative de nivel. Pentru cea de a doua variantă de calcul, structura se consideră cu rigidităţile infinit rigide, fiind deci mai rigidă decît structura reală, astfel încît valorile pulsaţiilor proprii se măresc, perioadele proprii scad, modificîndu-se ordonatele formelor proprii de vibraţie.

Tabelul 15.6

Caracteristici de vibraţie	Valori exacte	Valori calculate utilizînd rigid. relative de nivel.	Diferenţe
ω_1 ω_2	12,52 rad/s 32,79 rad/s	16,63 rad/s 37,26 rad/s	+33% +14%
T_1 T_2	0,50 s 0,19 s	0,38 s 0,17 s	−24% −10%
Forma I	$u_{11} = 1$ $u_{21} = 2{,}10$	$u_{11} = 1$ $u_{21} = 1{,}70$	— −19%
Forma II	$u_{12} = 1$ $u_{22} = -0{,}76$	$u_{12} = 1$ $u_{22} = -0{,}94$	— +14%

Scanned with OKEN Scanner

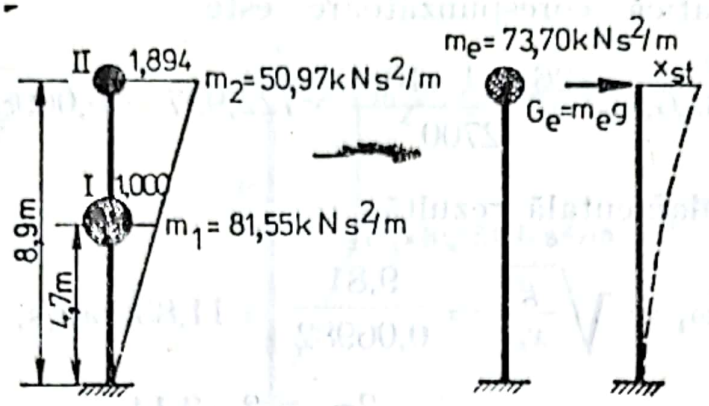


Fig. 15.21

c) Pentru utilizarea metodelor numerice aproximative, la calculul caracteristicilor fundamentale, se consideră prima formă de vibrație avînd ordonatele proporționale cu înălțimea structurii din figura 15.21.

Metoda masei echivalente

Valoarea masei echivalente, a cărei poziție se consideră la nivelul II, este

$$m_e = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2}{x_e^2} = \frac{81,55 \cdot 1^2 + 50,97 \cdot 1,894^2}{1,894^2} = 73,70 \text{ kNs}^2/\text{m}.$$

Matricea de rigiditate $\mathbf{k}$, determinată la punctul a), are forma

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 25,11 & -9,71 \\ -9,71 & 7,59 \end{bmatrix} EI_0,$$

iar valoarea determinantului $D = 25,11 \cdot 7,59 - 9,71^2 = 96,3\ (EI_0)^2$.

Matricea de flexibilitate, obținută prin inversarea matricei de rigiditate, este

$$\delta = \mathbf{k}^{-1} = \frac{EI_0}{D} \begin{bmatrix} 7,59 & 9,71 \\ 9,71 & 25,11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,882 & 10,083 \\ 10,083 & 21,074 \end{bmatrix} \frac{10^{-2}}{EI_0},$$

cu $EI_0 = 2700$ kNm², flexibilitatea, corespunzînd unei forțe — unitate aplicată orizontal la nivelul II, fiind $\delta_{22} = \dfrac{26,074 \cdot 10^{-2}}{EI_0}$.

Forța echivalentă ce se aplică pe orizontală, la nivelul II, are valoarea

$$G_e = m_e g = 73,70 \cdot 9,81 = 722,997 \text{ kN},$$

Scanned with OKEN Scanner

iar săgeata statică corespunzătoare este

$$x_{st} = \delta_{22} G_e = \frac{26{,}074 \cdot 10^{-2}}{2700} \cdot 722{,}997 = 0{,}06982 \text{ m}.$$

Pulsația fundamentală rezultă

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{x_{st}}} = \frac{9{,}81}{0{,}06982} = 11{,}85 \text{ rad/s},$$

iar perioada fundamentală $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{11{,}85} = 0{,}53$ s.

Pentru forma fundamentală de vibrație se obțin ordonatele:

$$u_{11} = 1, \quad u_{21} = 2{,}15.$$

Diferențele față de valorile exacte sînt -5%, pentru pulsația fundamentală și $+6\%$, pentru perioada fundamentală.

Utilizînd rigiditățile relative de nivel se obțin valorile:

$$\delta_{22} = \frac{13{,}658 \cdot 10^{-2}}{EI_0}, \quad x_{st} = 0{,}03657 \text{ m},$$

$$\omega_1 = 16{,}38 \text{ rad/s}, \quad T_1 = 0{,}38 \text{ s},$$

cu diferențe foarte mici față de valorile obținute la punctul b).

Metoda Rayleigh (metoda energetică).

Se calculează mai întîi deformata statică produsă de forțele gravitaționale pe nivele, aplicate orizontal pe direcțiile de oscilație (fig. 15.22).

$$x_1 = \delta_{11} G_1 + \delta_{12} G_2 = (7{,}88 \cdot 800 + 10{,}083 \cdot 500) \cdot \frac{10^{-2}}{EI_0} =$$

$$= \frac{113{,}471}{EI_0} = 0{,}04203 \text{ m} = 4{,}203 \cdot 10^{-2} \text{ m},$$

$$x_2 = \delta_{21} G_1 + \delta_{22} G_2 = (10{,}083 \cdot 800 + 26{,}074 \cdot 500) \cdot \frac{10^{-2}}{EI_0} =$$

$$= \frac{211{,}034}{EI_0} = 0{,}07816 \text{ m} = 7{,}816 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

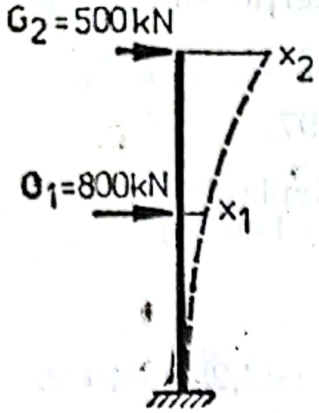


Fig. 15.22

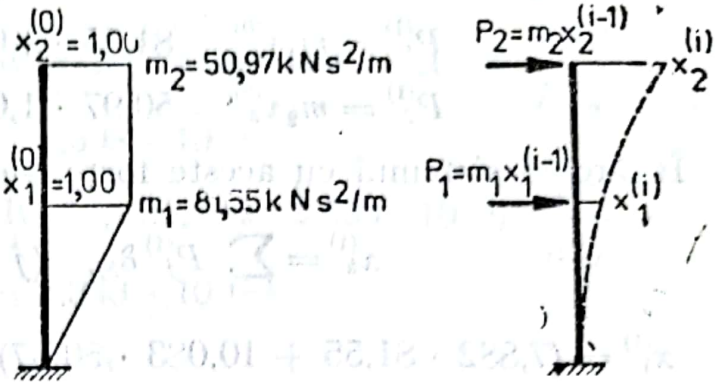


Fig. 15.23

Pentru calculul pulsației fundamentale

$$\omega_1^2 = g \frac{\sum_{k=1}^{n} G_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} G_k x_k^2},$$

datele sînt sistematizate în tabelul 15.7.

Tabelul 15.7

Nivel k	G_k (kN)	x_k (m)	x_k^2	$G_k x_k$	$G_k x_k^2$
1	800	$4{,}203 \cdot 10^{-2}$	$17{,}665 \cdot 10^{-4}$	33,624	1,4132
2	500	$7{,}816 \cdot 10^{-2}$	$61{,}090 \cdot 10^{-4}$	39,080	3,0545
Σ	—	—	—	72,704	4,4677

Pulsația fundamentală rezultă

$$\omega_1^2 = 9{,}81 \cdot \frac{72{,}704}{4{,}4677} = 159{,}64, \quad \omega_1 = 12{,}63 \text{ rad/s},$$

iar perioada fundamentală $T_1 = \dfrac{2 \cdot 3{,}14}{12{,}63} = 0{,}50$ s.

Metoda Stodola (metoda aproximațiilor succesive).

Ca deformată inițială se alege o curbă compatibilă cu legăturile sistemului, cum este cea din figura 15.23.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru prima iteraţie, valorile forţelor de inerţie sînt:

$$P_1^{(1)} = m_1 x_1^{(0)} = 81{,}55 \cdot 1{,}00 = 81{,}55,$$

$$P_2^{(1)} = m_2 x_2^{(0)} = 50{,}97 \cdot 1{,}00 = 50{,}97.$$

Încărcînd sistemul cu aceste forţe, se obţin deplasările:

$$x_k^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} P_j^{(1)} \delta_{kj}, \quad (j = 1{,}2).$$

$$x_1^{(1)} = (7{,}882 \cdot 81{,}55 + 10{,}083 \cdot 50{,}97) \cdot \frac{10^{-2}}{EI_0} = 4{,}285 \cdot 10^{-3},$$

$$x_2^{(1)} = (10{,}083 \cdot 81{,}55 + 26{,}074 \cdot 50{,}97) \cdot \frac{10^{-2}}{EI_0} = 7{,}967 \cdot 10^{-3}.$$

Pulsaţia fundamentală rezultă

$$\omega_1^2 = \frac{\sum_{k=1}^{2} x_k^{(0)}}{\sum_{k=1}^{2} x_k^{(1)}} = \frac{2}{12{,}252 \cdot 10^{-3}} = 163{,}24, \quad \omega_1 = 12{,}78 \text{ rad/s}.$$

Pentru cea de a doua iteraţie, forţele de inerţie sînt:

$$P_1^{(2)} = m_1 x_1^{(1)} = 81{,}55 \cdot 4{,}285 \cdot 10^{-3} = 0{,}349 \text{ kN},$$

$$P_2^{(2)} = m_2 x_2^{(1)} = 50{,}97 \cdot 7{,}967 \cdot 10^{-3} = 0{,}406 \text{ kN}.$$

iar deplasările:

$$x_1^{(2)} = (7{,}882 \cdot 0{,}349 + 10{,}083 \cdot 0{,}406) \frac{10^{-2}}{EI_0} = 2{,}535 \cdot 10^{-5},$$

$$x_2^{(2)} = (10{,}083 \cdot 0{,}349 + 26{,}074 \cdot 0{,}406) \frac{10^{-2}}{EI_0} = 5{,}224 \cdot 10^{-5}$$

Pulsaţia fundamentală rezultă

$$\omega_1^2 = \frac{\sum_{k=1}^{2} x_k^{(1)}}{\sum_{k=1}^{2} x_k^{(2)}} = \frac{12{,}252 \cdot 10^{-3}}{7{,}759 \cdot 10^{-5}} = 157{,}91, \quad \omega_1 = 12{,}57 \text{ rad/s}.$$

Pentru cea de a treia iteraţie, forţele de inerţie sînt:

$$P_1^{(3)} = 81{,}55 \cdot 2{,}535 \cdot 10^{-5} = 2{,}067 \cdot 10^{-3},$$

$$P_2^{(3)} = 50{,}97 \cdot 5{,}224 \cdot 10^{-5} = 2{,}663 \cdot 10^{-3},$$

Scanned with OKEN Scanner

iar deplasările:

$$x_1^{(3)} = (7{,}882 \cdot 7{,}067 \cdot 10^{-3} + 10{,}083 \cdot 7{,}663 \cdot 10^{-3}) \frac{10^{-2}}{EI_0} =$$

$$= 1{,}598 \cdot 10^{-7},$$

$$x_2^{(3)} = (10{,}083 \cdot 2{,}067 \cdot 10^{-3} + 26{,}074 \cdot 2{,}663 \cdot 10^{-3}) \frac{10^{-2}}{EI_0} =$$

$$= 3{,}343 \cdot 10^{-7}.$$

Pulsația fundamentală rezultă

$$\omega_1^2 = \frac{7{,}759 \cdot 10^{-5}}{4{,}941 \cdot 10^{-7}} = 157{,}03, \quad \omega_1 = 12{,}53 \text{ rad/s}.$$

Procedînd în același mod, se calculează, în iterația patru:

$$\omega_1^2 = 156{,}91, \quad \omega_1 = 12{,}53 \text{ rad/s}, \quad T_1 = 0{,}50 \text{ s}.$$

În tabelul 15.8 se dau valorile pulsației fundamentale obținute în procesul de iterație, cu diferențele față de valoarea exactă

$$\omega_1 = 12{,}52 \text{ rad/s}.$$

Tabelul 15.8

Iterația	ω_1 (rad/s)	Diferența față de ω_1 exact
1	12,70	+2,08%
2	12,57	+0,40%
3	12,53	+0,08%
4	12,53	+0,08%

Utilizînd ca deformată inițială, deformata produsă de forțele gravitaționale aplicate static pe direcțiile de oscilație (calculată la metoda energetică):

$$x_1^{(0)} = 4{,}203 \cdot 10^{-2}, \qquad x_2^{(0)} = 7{,}816 \cdot 10^{-2},$$

forțele de inerție în prima iterație sînt:

$$P_1^{(1)} = 3{,}427, \qquad P_2^{(1)} = 3{,}984,$$

iar deplasările rezultă:

$$x_1^{(1)} = 2{,}488 \cdot 10^{-4}, \qquad x_2^{(1)} = 5{,}127 \cdot 10^{-4}.$$

Pulsația fundamentală calculată în acest caz este $\omega_1 = 12{,}56$ rad/s, fiind deci suficientă o singură iterație de calcul.

Scanned with OKEN Scanner

În tabelul 15.9 se prezintă comparativ rezultatele obținute în calculul pulsației fundamentale, cu metodele numerice aproximative utilizate la rezolvarea acestei probleme.

Tabelul 15.9

Metoda	ω_1 (rad/s)	Diferența față de $\omega_1 = 12{,}52$
Masei echivalente	11,85	−5,35%
Rayleigh (energetică)	12,63	+0,88%
Stodola	12,53	+0,08%

Problema 15.17. Se dă structura de beton armat, cu două nivele, din figura 15.20,a și se cere să se determine diagrama de moment încovoietor din acțiunea forțelor seismice. Construcția este situată într-o zonă cu grad de protecție antiseismică 8.

La problema 15.16 s-au determinat caracteristicile de vibrație ale structurii, perioada fundamentală fiind $T_1 = 0{,}50$. Conform normativului de calculul structurilor la acțiuni seismice, rezultanta forțelor seismice orizontale este

$$S = cG = \beta\varepsilon\psi k_s G,$$

cu următoarele valori ale coeficienților:

$$\beta = 2, \qquad \varepsilon = 0{,}8, \qquad \psi = 0{,}2.$$

Pentru zona cu grad de protecție antiseismică 8, coeficientul de intensitate seismică $k_s = 0{,}20$, deci

$$S = 0{,}32 \cdot 0{,}20\, G = 0{,}064(800 + 500) = 83{,}2 \text{ kN}.$$

Distribuția forței seismice totale pe nivele se calculează în tabelul 15.10.

Tabelul 15.10

Nivel	Încercări gravitaționale pe nivel G_k(kN)	Ordonatele primei forme proprii k	$G_k x_k$	$\frac{G_k x_k}{\Sigma G_k x_k} = \eta_k$	$S_k = S\eta_k$
1	800	1,00	800	0,432	35,94
2	500	2,10	1050	0,568	47,26
Σ	1300	—	1850	—	83,20

Scanned with OKEN Scanner

Observație. În locul utilizării ordonatelor primei forme de vibrație, la calculul forțelor seismice de nivel, se poate aproxima forma fundamentală de vibrație cu o variație liniară, utilizînd în calcule înălțimile nivelelor, măsurate de la baza structurii. Calculele sînt efectuate în tabelul 15.11, iar valorile forțelor seismice pe nivel sînt foarte apropiate de cele determinate anterior.

Tabelul 15.11

Nivel k	G_k	h_k	$G_k h_k$	$\eta_k = \frac{G_k h_k}{\Sigma G_k h_k}$	$S_k = S\eta_k$
1	800	4,2	3,360	0,430	35,78
2	500	8,9	4,450	0,570	47,42
Σ	1300	—	7,810	—	83,20

Pentru determinarea diagramei de moment încovoietor pe cadru, din încărcarea cu forțele seismice de nivel (fig. 15.24, b), se calculează deplasările necunoscute Z_1 și Z_2 cu ajutorul lucrului mecanic virtual (fig. 15.24, c).

$$L_{1p} = 35{,}94, \qquad L_{2p} = 47{,}26,$$

$$L_{11} = -r_{11} = -25{,}11, \quad L_{22} = -r_{22} = -7{,}59, \quad L_{12} = r_{12} = 9{,}17.$$

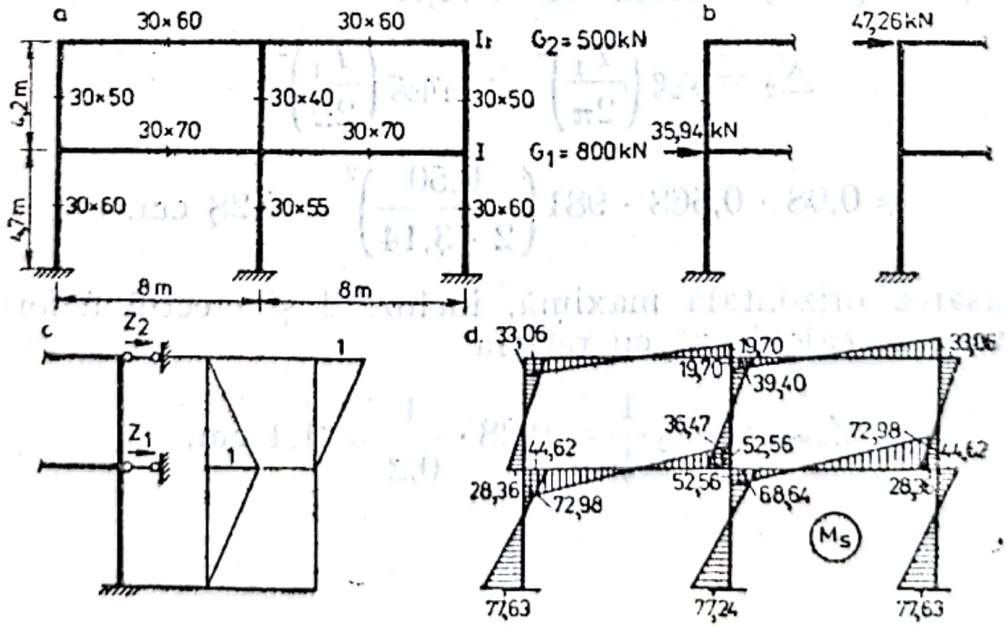


Fig. 15.24

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvînd sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} -25{,}11\,Z_1 + 9{,}71\,Z_2 + 35{,}94 = 0, \\ 9{,}71\,Z_1 - 7{,}59\,Z_2 + 47{,}26 = 0, \end{cases}$$

se obţin valorile necunoscutelor: $Z_1 = 7{,}596$, $Z_2 = 15{,}945$.

Utilizînd diagramele m_1^f şi m_2^f, determinate la problema 15.16, diagrama finală este $M = m_1^f Z_1 + m_2^f Z_2$, fiind reprezentată în figura 15.24, d.

Deplasarea orizontală maximă produsă de forţele seismice de nivel, pentru $EI_0 = 2700$ kNm², este

$$\Delta_2 = \delta_{21} S_1 + \delta_{22} S_2 = (10{,}083 \cdot 35{,}94 + 26{,}074 \cdot 47{,}26) \frac{10^{-2}}{EI_0} =$$

$$= 0{,}59 \cdot 10^{-2}\,\text{m} = 0{,}59\ \text{cm}.$$

Observaţie. Utilizînd relaţiile directe, pentru metode simplificate de determinare a perioadei proprii de vibraţie, la clădiri cu $n \leqslant 5$ nivele, se obţine

$$T_1 = 0{,}30 + 0{,}05 \cdot 2 = 0{,}40\ \text{s},$$

faţă de 0,50 s — valoare exactă, sau 0,38 s — valoare obţinută utilizînd rigidităţile relative de nivel.

Deplasarea orizontală convenţională, produsă de forţele seismice orizontale, se poate calcula cu relaţia

$$\Delta_2 = c_2 g \left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 = c_2 \eta_2 g \left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 =$$

$$= 0{,}08 \cdot 0{,}568 \cdot 981 \left(\frac{0{,}50}{2 \cdot 3{,}14}\right)^2 = 0{,}28\ \text{cm}.$$

Deplasarea orizontală maximă, incluzînd şi efectul deformărilor postelastice, se calculează cu relaţia

$$\Delta_{max} = \Delta_2 \frac{1}{\psi} = 0{,}28 \cdot \frac{1}{0{,}2} = 1{,}4\ \text{cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

CALCULUL GEOMETRIC NELINIAR AL STRUCTURILOR

Scanned with OKEN Scanner

GENERALITĂȚI

Fenomenul real al comportării structurilor sub acțiunea încărcărilor exterioare este neliniar. Sursele de neliniaritate sînt:

— neliniaritatea fizică, datorită proprietăților fizico-mecanice ale materialelor,

— neliniaritatea geometrică, datorită modificării geometriei structurii în timpul deformării.

Pentru rezolvarea problemei calculului neliniar — atît fizic cît și geometric — rezultă modele matematice neliniare, ale căror soluții sînt greu de determinat, iar în unele cazuri practic imposibil.

Următoarele două capitole tratează aspectele practice ale calculului geometric neliniar. Problemele calculului geometric neliniar sînt: calculul de ordinul II și calculul de stabilitate al structurilor. În această lucrare cele două probleme vor fi abordate considerînd comportarea liniar elastică a materialului.

Specificul calculului de ordinul II constă în aceea că, luînd în considerație efectul deformațiilor asupra eforturilor (în cazul forțelor axiale mari), se determină eforturile și deplasările structurii.

Specificul calculului de stabilitate constă în aceea că, din condiția de echilibru stabil la limită, se obține valoarea forței critice de pierdere a stabilității și lungimea de flambaj, a barelor puternic comprimate. Prin acest calcul nu se pot obține nici eforturile și nici deplasările structurii.

La baza calculului geometric neliniar stau următoarele ipoteze simplificatoare:

— materialul se consideră liniar elastic (fig. 1, a),

— relația forță-deplasare este neliniară (fig. 1, b),

— relația deformație specifică-deplasare este neliniară, forma ei, pentru bare făcînd parte din structuri plane, fiind:

- pentru bara solicitată axial

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2, \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

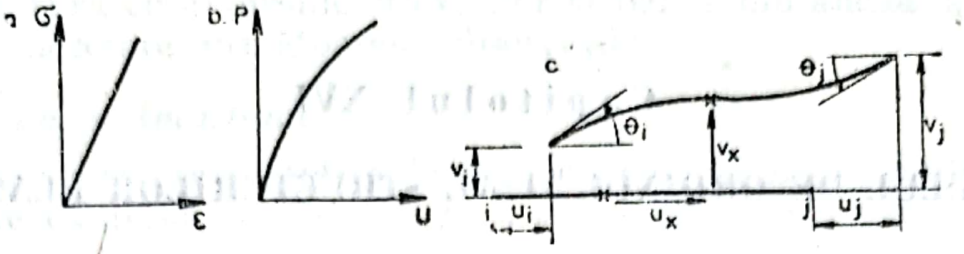


Fig. 1

- pentru bara solicitată la încovoiere cu forță axială

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 - y\frac{\partial v_x^2}{\partial x^2}, \tag{2}$$

unde u_x și v_x reprezintă deplasările secțiunii curente pe direcția axei barei și respectiv pe direcția normalei pe axa barei, iar y distanța de la punctul în care se măsoară x pînă la axa neutră (fig. 1, c),

— deplasările pot fi mici sau mari, însă deformațiile sînt mici, $\psi = \frac{v_j - v_i}{l}$.

Consecințele acestor ipoteze sînt:

— condițiile de echilibru static se exprimă pe forma deformată a structurii, pentru a evalua efectul deformațiilor asupra eforturilor,

— se poate utiliza forma aproximativă pentru curbură, $\frac{1}{\rho} = v''$,

— principiul suprapunerii efectelor nu se mai poate aplica decît într-un caz particular și anume, numai pentru efectul forțelor transversale, dacă forța axială rămîne constantă.

Teoremele generale utilizate în calculul de ordinul I sînt valabile și în acest caz, cu următoarele observații:

— teoremele de reciprocitate se pot aplica cu condiția ca forța axială să fie constantă, condiție admisă pentru o combinație de încărcări posibil să apară în cursul exploatării construcției,

— în problemele de stabilitate atingerea stadiului critic se caracterizează prin faptul că variația de ordinul doi a energiei de deformație este egală cu zero.

În capitolele XVI și XVII se tratează calculul de ordinul II și respectiv de stabilitate, în formularea clasică, iar în capitolul XIX se tratează ambele tipuri de calcul, în formulare matriceală.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XVI

CALCULUL DE ORDINUL II AL STRUCTURILOR ELASTICE

Calculul de ordinul II al structurilor de rezistență se poate efectua prin cele două metode generale ale Staticii construcțiilor, metoda forțelor și metoda deplasărilor. În cele ce urmează se va utiliza numai metoda deplasărilor în forma clasică, deoarece și în calculul de ordinul II sistemul de bază își păstrează simplitatea rezolvării.

Formal, sistemul ecuațiilor de condiție al metodei deplasărilor este același ca și în calculul de ordinul I,

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} Z_j + R_{ip} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad \text{(XVI.1)}$$

Diferența constă în faptul că în evaluarea coeficienților necunoscutelor și a termenilor liberi trebuie să se țină seama de influența forțelor axiale asupra valorilor momentelor încovoietoare și a forțelor tăietoare.

Din acest punct de vedere barele sistemului de bază pot fi împărțite în două categorii: bare puternic comprimate (cazul stîlpilor) și bare puțin solicitate sau deloc solicitate la compresiune (cazul riglelor). Elementul care permite această clasificare a barelor este *parametrul de încărcare axială*, cu expresia

$$v = l \sqrt{\frac{N}{EI}}. \qquad \text{(XVI.2)}$$

Funcție de acest parametru, eforturile — momentele încovoietoare și forțele tăietoare — vor fi corectate. În anexa 5 sînt date expresiile eforturilor pentru barele dublu încastrate și încastrate-articulate, pentru diferite încărcări, iar în anexa 7 sînt date valorile funcțiilor de corecție pentru diferite valori ale parametrului de încărcare axială. Cîteva cazuri de bare și încărcări sînt rezolvate integral, ca aplicații, la acest capitol.

Scanned with OKEN Scanner

În legătură cu expresiile eforturilor la barele din anexa 5, tabelul 5.1, sînt necesare următoarele observaţii:

Bara dublu încastrată

— La încărcarea cu rotire de nod coeficientul de rigiditate, notat cu ρ'_{ij}, are expresia

$$\rho'_{ij} = \rho_{ij}\varphi_2(v), \tag{XVI.3}$$

iar coeficientul de transmitere a momentului încovoietor la capătul opus este

$$t'_{ji} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi_3(v)}{\varphi_2(v)}, \tag{XVI.4}$$

unde ρ_{ij} este coeficientul de rigiditate utilizat în calculul de ordinul I.

— La încărcarea cu translaţie de nod (rotire de bară) coeficientul de rigiditate, notat cu ρ''_{ij}, are expresia

$$\rho''_{ij} = \rho_{ij}\varphi_4(v). \tag{XVI.5}$$

Bara încastrată-articulată

— La încărcarea cu rotire de nod coeficientul de rigiditate are expresia

$$\rho'_{ik} = \rho_{ik}\varphi_1(v). \tag{XVI.6}$$

— La încărcarea cu translaţie de nod (rotire de bară) coeficientul de rigiditate are expresia

$$\rho''_{ik} = \rho_{ik}\varphi_1(v).$$

Calculul de ordinul II necesită cunoaşterea forţelor axiale din bare, ceea ce se obţine printr-un calcul de ordinul I. Pentru a evita efectuarea calculului de ordinul I, forţele axiale pot rezulta şi dintr-un calcul aproximativ, fără a introduce erori mari în valoarea parametrului de încărcare axială.

APLICAŢII

Problema 16.1. Să se determine expresia momentului încovoietor şi a forţei tăietoare la bara încastrată-articulată din figura 16.1, încărcată cu forţa axială P şi cu translaţia de nod $\Delta = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

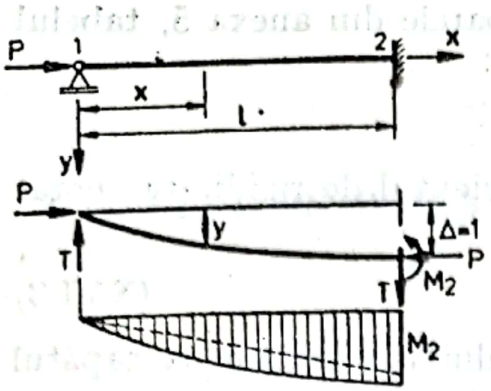


Fig. 16.1

Pentru rezolvare se utilizează metoda integrării ecuației fibrei medii deformate

$$y'' = -\frac{M_x}{EI},$$

unde M_x este momentul încovoietor în secțiunea curentă și are, în acest caz, expresia $M_x = xT + yP$.

Cu această expresie ecuația fibrei medii deformate devine

$$y'' + k^2 y = -\frac{xT}{EI},$$

în care s-a notat $k^2 = \frac{P}{EI}$.

Soluția generală a ecuației diferențiale este

$$y = y_1 + y_2,$$

cu y_1 soluția ecuației omogene și y_2 o soluție particulară.

Soluția ecuației omogene este

$$y_1 = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx,$$

iar y_2 se alege de forma termenului liber, $y_2 = Cx$.

Impunînd condiția ca y_2 să verifice ecuația diferențială, se obține

$$k^2 Cx = -\frac{xT}{EI},$$

de unde $C = -\frac{T}{P}$, deoarece $P = k^2 EI$.

Soluția generală devine

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - \frac{T}{P} x.$$

Constantele C_1 și C_2 se determină din condițiile de capăt:

— pentru $x = 0$, $y = 0$,

— pentru $x = l$, $y' = 0$, cu $y' = kC_1 \cos kx - kC_2 \sin kx - \frac{T}{P}$.

Scanned with OKEN Scanner

Din prima condiție rezultă $C_2 = 0$, iar din a doua rezultă $C_1 = \frac{T}{P} \cdot \frac{1}{k \cos v}$, unde $v = kl$ reprezintă parametrul de încărcare axială a barei.

Expresia deplasării după normala pe axa barei în secțiunea curentă, este

$$y = \frac{T}{P}\left(\frac{\sin kx}{k \cos v} - x\right),$$

cu forța T necunoscută. Această forță se determină din următoarea condiție: pentru $x = l$, $y = \Delta = 1$, de unde, după unele transformări, rezultă

$$T = \frac{P}{l}\left(\frac{v}{\operatorname{tg} v - v}\right).$$

Momentul încovoietor în secțiunea din încastrarea 2 este

$$M_2 = Tl + P\Delta = P\left(\frac{v}{\operatorname{tg} v - v} + 1\right).$$

Deoarece în calculul de ordinul I, $M_2^{(1)} = \frac{3i}{l}\Delta = \frac{3i}{l}$, momentul încovoietor în calculul de ordinul II se poate scrie

$$M_2 = \frac{3i}{l} \cdot \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)} = \frac{3i}{l}\varphi_1(v),$$

unde s-a introdus notația $\varphi_1(v) = \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)}$.

Se observă că momentul încovoietor în calculul de ordinul II se poate scrie ca fiind egal cu momentul încovoietor din calculul de ordinul I, multiplicat cu funcția de corecție $\varphi_1(v)$. Funcția $\varphi_1(v)$ introduce efectul forței axiale asupra momentului încovoietor.

Forța tăietoare se poate exprima astfel

$$T = \frac{1}{l}(M_2 - P \cdot 1) = \frac{1}{l}\left(\frac{3i}{l}\varphi_1(v) - k^2 EI\right)$$

sau

$$T = \frac{3i}{2}\eta_1(v),$$

unde $\eta_1(v) = \varphi_1(v) - \frac{v^2}{3}$ reprezintă funcția de corecție a forței tăietoare din calculul de ordinul I.

Scanned with OKEN Scanner

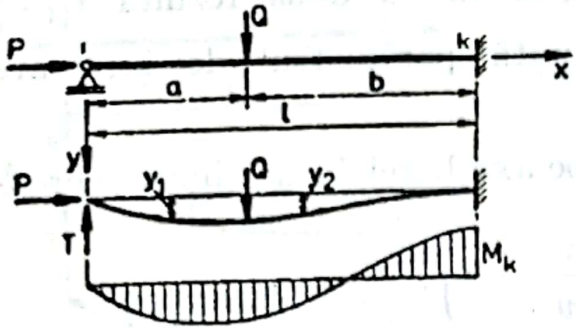


Fig. 16.2

Problema 16.2. Să se determine expresia momentului încovoietor şi a forţei tăietoare la bara încastrată-articulată din fig. 16.2, încărcată axial şi transversal.

Pentru rezolvare se utilizează ecuaţia fibrei medii deformate scrisă pentru cele două intervale, din stînga şi din dreapta forţei transversale Q.

Zona 1 $(0 \leqslant x \leqslant a)$

$$M_x = Tx + Py_1,$$

$y_1'' = -\frac{1}{EI}(Tx + Py_1)$, de unde, cu notaţia $k^2 = \frac{P}{EI}$, rezultă

$$y_1'' + k^2 y_1 = -\frac{Tx}{EI}.$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii este $y_1 = y_{11} + y_{12}$.

Soluţia particulară y_{12} se alege de forma $y_{12} = Cx$. Introducînd în ecuaţia diferenţială, rezultă $C = -\frac{T}{P}$ şi deci

$$y_1 = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - \frac{T}{P}x.$$

Zona 2 $(a \leqslant x \leqslant l)$

$$M_x = T_x + Py_2 - Q(x - a),$$

$$y_2'' + k^2 y_2 = -\frac{Tx}{EI} + \frac{Q(x-a)}{EI}.$$

Soluţia ecuaţiei este

$$y_2 = y_{21} + y_{22},$$

unde:

$$y_{21} = C_3 \sin kx + C_4 \cos kx,$$

$$y_{22} = B_0 + B_1 x.$$

Scanned with OKEN Scanner

Punînd condiţia ca soluţia particulară y_{22} să verifice ecuaţia, prin identificarea termenilor, rezultă

$$B = -\frac{Qa}{P}, \quad B_1 = \frac{Q-T}{P} \text{ şi } y_{22} = -\frac{Qa}{P} + \frac{Q-T}{P}x.$$

Soluţia generală are forma

$$y_2 = C_3 \sin kx + C_4 \cos kx + \frac{Q-T}{P}x - \frac{Qa}{P}.$$

Constantele C_1, C_2, C_3 şi C_4 se determină din condiţiile de capăt şi de continuitate a deformatei în secţiunea în care este aplicată forţa transversală Q:

- pentru $x = 0$, $y_1 = 0$,
- pentru $x = l$, $y_2 = 0$ şi $y_2' = 0$,
- pentru $x = a$, $y_1 = y_2$ şi $y_1' = y_2'$.

Expresiile rotirii secţiunii curente y_1' şi y_2', pe cele două zone sînt:

$$y_1' = kC_1 \cos kx - kC_2 \sin kx - \frac{T}{P},$$

$$y_2' = kC_3 \cos kx - kC_4 \sin kx + \frac{Q-T}{P}.$$

Din aceste condiţii se obţin următoarele expresii ale constantelor:

$$C_2 = 0,$$

$$C_1 = \frac{1}{P \sin kl}\left(Tl - Qb - \frac{Q}{k}\sin ka \cos kl + \frac{Q}{2k}\sin 2ka \sin kl\right),$$

$$C_3 = \frac{1}{P \sin kl}\left(Tl - Qb - \frac{Q}{k}\sin ka \cos kl\right),$$

$$C_4 = \frac{Q}{kP}\sin ka.$$

Cu aceste valori, săgeţile y_1 şi y_2 au expresiile:

$$y_1 = \frac{\sin kx}{P \sin kl}\left(Tl - Qb - \frac{Q}{k}\sin ka \cos kl\right) + \frac{Q}{2k}\sin 2ka \sin kl\Big) - \frac{T}{P}x,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$y_2 = \frac{\sin kx}{P \sin kl}\left(Tl - Qb - \frac{Q}{k}\sin ka \cos kl\right) +$$

$$+ \frac{Q}{kP}\sin ka \cos kx + \frac{Q - T}{P}x - \frac{Qa}{P}.$$

Reacțiunea T se determină din condiția: pentru $x = l$, $y_2' = 0$, de unde, cu $v = kl$, rezultă

$$T = Q\frac{\sin v - kb\cos v - \sin ka}{\sin v - v\cos v}.$$

Pentru cazul general, $a \neq b$, momentul încovoietor M_k are expresia

$$M_k = Tl - Qb = Q\left[\frac{l(\sin v - kb\cos v - \sin ka)}{\sin v - v\cos v} - b\right].$$

În cazul particular $a = b = \frac{l}{2}$, se obține

$$M_k = \frac{3}{2}Ql \cdot \frac{\varphi_1(v)}{v^2}\left(1 - \frac{2\sin\frac{v}{2}}{\sin v}\right)$$

sau

$$M_k = -\frac{3Ql}{16}\gamma_2(v), \text{ unde } \gamma_2(v) = \frac{8\varphi_1(v)}{v^2}\left(\frac{1}{\cos\frac{v}{2}} - 1\right).$$

Semnul minus indică faptul că este întinsă fibra de sus, dar în calculul obișnuit se determină valoarea absolută, așa cum s-a dat și în anexa 5.

Problema 16.3. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și de forță tăietoare la structura din figura 16.3, printr-un calcul de ordinul II, utilizînd metoda deplasărilor. Se dă $EI = 16000$ kNm².

Din punct de vedere al metodei deplasărilor, problema conduce la o singură necunoscută și anume, deplasarea Z_1 pe direcția gradului de libertate. Ecuația de condiție este

$$r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

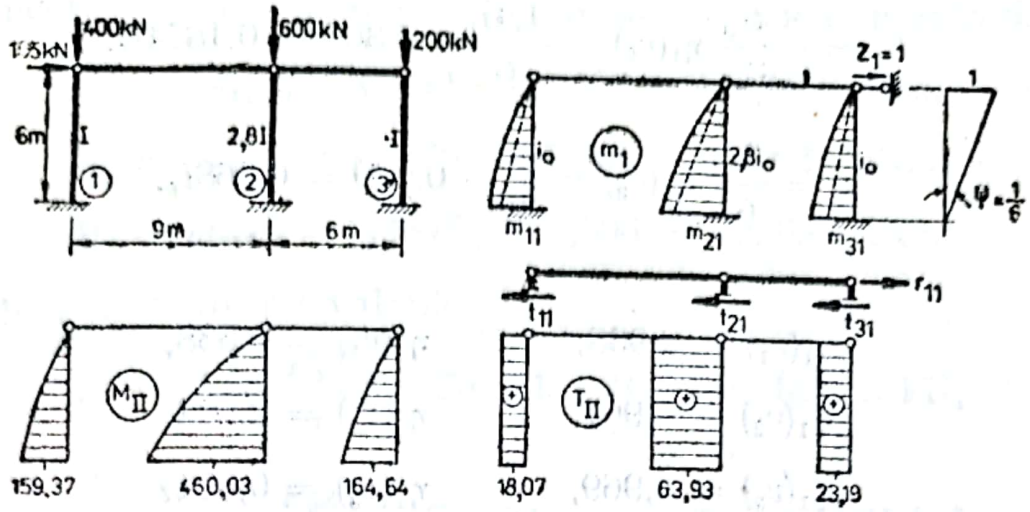


Fig. 16.3

Deoarece atît momentele încovoietoare cît şi forţele tăietoare pe stîlpi — bare puternic comprimate — sînt corectate în funcţie de parametrii de încărcare axială, se calculează aceşti parametri, cu relaţia $v_i = l_i \sqrt{\frac{N_i}{EI_i}}$;

$$v_1 = 6\sqrt{\frac{400}{16\,000}} = 0{,}949, \quad v_2 = 6\sqrt{\frac{600}{2{,}8 \cdot 16\,000}} = 0{,}694,$$

$$v_3 = 6\sqrt{\frac{200}{16\,000}} = 0{,}670.$$

Încărcînd sistemul de bază cu deplasarea elastică $Z_1 = 1$, în prezenţa forţelor axiale pe stîlpi, rezultă următoarele valori ale momentelor încovoietoare din secţiunile de încastrare şi ale forţelor tăietoare:

$$m_{11} = \frac{3i_0}{6}\varphi_1(v_1) = 0{,}5i_0 \cdot 0{,}938 = 0{,}469i_0,$$

$$m_{21} = \frac{8{,}4i_0}{6}\varphi_1(v_2) = 1{,}4i_0 \cdot 0{,}967 = 1{,}3538i_0,$$

$$m_{31} = \frac{3i_0}{6}\varphi_1(v_3) = 0{,}5i_0 \cdot 0{,}969 = 0{,}4845i_0,$$

$$t_{11} = \frac{3i_0}{6^2}\eta_1(v_1) = \frac{i_0}{12} \cdot 0{,}638 = 0{,}0532i_0,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$t_{21} = \frac{8{,}4 i_0}{6^2}\,\eta_1(v_2) = \frac{1{,}4 i_0}{6} \cdot 0{,}803 = 0{,}1874 i_0,$$

$$t_{31} = \frac{3 i_0}{6^2}\,\eta_1(v_3) = \frac{i_0}{12} \cdot 0{,}820 = 0{,}068 i_0,$$

unde:

$$\varphi_1(v_1) = 0{,}938, \qquad \eta_1(v_1) = 0{,}638,$$
$$\varphi_1(v_2) = 0{,}967, \qquad \eta_1(v_2) = 0{,}803,$$
$$\varphi_1(v_3) = 0{,}969, \qquad \eta_1(v_3) = 0{,}821.$$

Calculul reacțiunii r_{11}.

— utilizînd ecuația de proiecții pe orizontală, $\sum X_i = 0$,

$r_{11} - t_{11} - t_{21} - t_{31} = 0$, de unde $r_{11} = 0{,}309 i_0$.

— utilizînd condiția de lucru mecanic virtual egal cu zero.

Deplasarea virtuală se dă din poziția deformată obținută prin deplasarea elastică $Z_1 = 1$. De aceea va produce lucru mecanic și cuplul forțelor verticale $P \cdot 1$, parcurgînd rotirea stîlpului, $\psi = \frac{1}{l}$,

$$r_{11} \cdot 1 - (0{,}469 + 1{,}3538 + 0{,}4845)\,\frac{i_0}{6} + \frac{400 + 600 + 200}{6} \cdot \frac{i_0}{i_0} = 0,$$

de unde, deoarece $i_0 = \frac{EI}{6} = \frac{16\,000}{6}$, rezultă

$$r_{11} = (0{,}384 - 0{,}075)\, i_0 = 0{,}309\, i_0,$$

deci același rezultat.

Calculul reacțiunii R_{1p}.

$R_{1p} + 105 = 0$, iar de aici $R_{1p} = 105$ kN.

Deplasarea Z_1 rezultă,

$$Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = \frac{105}{0{,}309\, i_0} = \frac{105 \cdot 6}{0{,}309 \cdot 16\,000} = 0{,}1274 \text{ m} = 12{,}74 \text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Momentele încovoietoare pe stîlpi, în secţiunile din **încastrări, sînt:**

$$M_1 = m_{11}Z_1 = 0{,}469 \cdot 339{,}806 = 159{,}369 \text{ kNm},$$

$$M_2 = m_{21}Z_1 = 1{,}3538 \cdot 339{,}806 = 460{,}029 \text{ kNm},$$

$$M_3 = m_{31}Z_1 = 0{,}4845 \cdot 339{,}806 = 164{,}636 \text{ kNm}.$$

Forţele tăietoare au valorile:

$$T_1 = \frac{M_1}{l} - \frac{P_1 Z_1}{l} = 26{,}561 - 8{,}493 = 18{,}068 \text{ kN},$$

$$T_2 = \frac{M_2}{l} - \frac{P_2 Z_1}{l} = 76{,}671 - 12{,}740 = 63{,}931 \text{ kN},$$

$$T_3 = \frac{M_3}{l} - \frac{P_3 Z_1}{l} = 27{,}439 - 4{,}246 = 23{,}193 \text{ kN}.$$

Verificare:

$$\sum X_i = 0, \quad T_1 + T_2 + T_3 - 105 = 0{,}192 \simeq 0.$$

În calculul de ordinul I, momentele încovoietoare pe stîlpi sînt:

$$M_1^{(1)} = 630 \cdot \frac{1}{4{,}8} = 131{,}25 \text{ kNm}, \quad M_2^{(1)} = 630 \cdot \frac{2{,}8}{4{,}8} = 367{,}50 \text{ şi}$$

$$M_3^{(1)} = 630 \cdot \frac{1}{4{,}8} = 131{,}25 \text{ kNm}.$$

Comparînd valorile obţinute în cele două tipuri de calcul, rezultă:

$$\eta_1 = \frac{M_1^{(2)}}{M_1^{(1)}} = \frac{159{,}369}{131{,}25} = 1{,}214, \quad \eta_2 = 1{,}251, \quad \eta_3 = 1{,}254.$$

Valorile coeficientului η fiind apropiate, rezultă că secţiunile stîlpilor au fost bine alese, dar efectul de ordinul II este important, reprezentînd o creştere de circa 25% faţă de calculul de ordinul I.

Problema 16.4. La structura din figura 16.4, să se traseze diagramele de moment încovoietor şi de forţă tăietoare. Se dă $EI = 24000$ kNm^2.

Scanned with OKEN Scanner

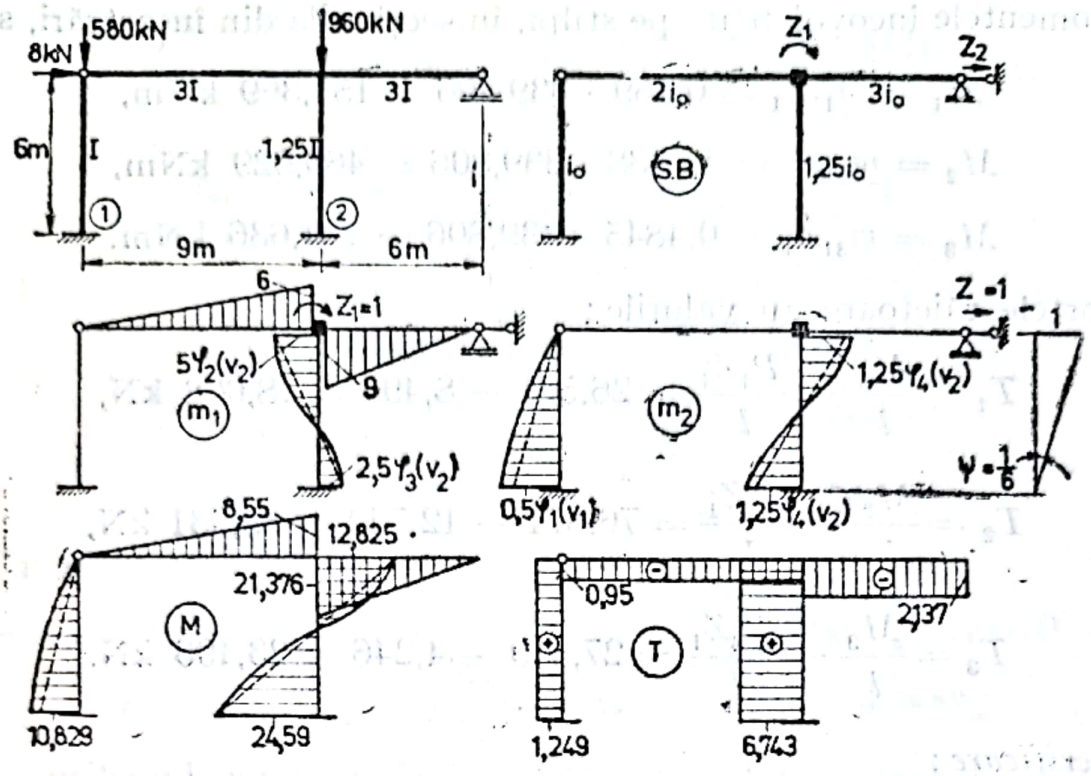


Fig. 16.4

Structura este cu noduri deplasabile, avînd două necunoscute. Sistemul de ecuaţii are forma

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$

Rigidităţile practice s-au calculat pentru $i_0 = \dfrac{EI}{6}$, iar momentele încovoietoare unitare, considerînd $i_0 = 1$.

Valorile parametrilor de încărcare axială pentru cei doi stîlpi au valorile:

$$v_1 = 6\sqrt{\frac{580}{24\,000}} = 0{,}933, \quad v_2 = 6\sqrt{\frac{960}{1{,}25 \cdot 24\,000}} = 1{,}073.$$

Coeficienţii necunoscutelor şi termenii liberi sînt:

$$r_{11} = 15 + 5\varphi_2(v_2), \qquad r_{12} = r_{21} = -1{,}25\ \varphi_4(v_2),$$

$$r_{22} = \frac{1}{12}\eta_1(v_1) + \frac{2{,}5}{6}\eta_2(v_2), \quad R_{1p} = 0, \quad R_{2p} = -8\ \text{kN}.$$

Reacţiunile r_{21} şi r_{22} au fost calculate exprimînd condiţia de echilibru sub forma ecuaţiei de proiecţii pe orizontală.

Scanned with OKEN Scanner

Din anexa 7 rezultă, pe baza acestor parametri de încărcare axială, următoarele valori ale funcţiilor de corecţie pentru momentele încovoietoare şi forţele tăietoare:

$$\varphi_1(v_1) = 0{,}940, \qquad \eta_1(v_1) = 0{,}648, \qquad \varphi_3(v_2) = 1{,}0198,$$
$$\varphi_2(v_2) = 0{,}961, \qquad \varphi_4(v_2) = 0{,}980, \qquad \eta_2(v_2) = 0{,}885.$$

Cu mărimile funcţiilor de corecţie, rezultă, pentru coeficienţii necunoscutelor şi termenii liberi, următoarele valori:

$$r_{11} = 19{,}805, \quad r_{12} = r_{21} = -1{,}225,$$
$$r_{22} = 0{,}423, \quad R_{1p} = 0, \quad R_{2p} = -8 \text{ kN}$$

şi sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 19{,}805\, Z_1 - 1{,}225\, Z_2 = 0 \\ -1{,}225\, Z_1 + 0{,}423\, Z_2 - 8 = 0 \end{cases}$$

Necunoscutele au valorile: $Z_1 = 1{,}425$, $Z_2 = 23{,}04$.

Diagrama finală de moment încovoietor se obţine cu relaţia obişnuită $M = M_p + m_1 Z_1 + m_2 Z_2$. În acest caz $M_p \equiv 0$.

Observaţii. Dacă se determină reacţiunea r_{22}, din legătura de grad de libertate, utilizînd lucrul mecanic virtual, trebuie avut în vedere faptul că deplasarea virtuală se dă din poziţia deformată corespunzătoare deplasării elastice $Z_2 = 1$. Din această cauză vor produce lucru mecanic, prin deplasarea virtuală $\bar{Z}_2 = 1$ şi cuplul forţelor ce acţionează pe stîlpi. Deci

$$r_{22} \cdot 1 - 0{,}5\, \varphi_1(v_1) \cdot \frac{1}{6} - 2 \cdot 1{,}25\, \varphi_4(v_2) \cdot \frac{1}{6} + \frac{P_1 \cdot 1}{i_0} \psi_1 + \frac{P_2 \cdot 1}{i_0} \psi_2 = 0.$$

Introducînd $i_0 = \dfrac{24\,000}{6} = 4000$, rezultă $\dfrac{P_1 \cdot 1}{i_0} \psi_1 = 0{,}0241$, $\dfrac{P_2 \cdot 1}{i_0} \psi_2 = 0{,}040$ şi apoi $r_{22} = 0{,}0783 + 0{,}4083 - 0{,}0241 - 0{,}040$, adică $r_{22} = 0{,}423$. S-a obţinut acelaşi rezultat ca şi prin scrierea ecuaţiei de proiecţii pe orizontală.

În calculul reacţiunii r_{21} se procedează în mod obişnuit, ţinînd seama de valorile reale ale momentelor încovoietoare din diagrama M_1,

$$r_{21} \cdot 1 + 5 \cdot \varphi_2(v_2) \cdot \psi + 2{,}5 \cdot \varphi_3(v_2) \cdot \psi = 0,$$
$$r_{21} = -\frac{5 \cdot 0{,}961}{6} - \frac{2{,}5 \cdot 1{,}0198}{6} = -1{,}225.$$

Scanned with OKEN Scanner

S-a obținut același rezultat.

— Forțele tăietoare pe stîlpi se calculează, în final, astfel:

Stîlpul 1

$$T_1 = \frac{M_1}{l} - \frac{P_1 Z_2}{i_0} = \frac{10{,}829}{6} - \frac{580 \cdot 23{,}04}{4\,000 \cdot 6} = 1{,}249 \text{ kN}.$$

Stîlpul 2

$$T_2 = \frac{M_i + M_s}{l} - \frac{P_2 Z_2}{i_0} = \frac{45{,}966}{6} - \frac{960 \cdot 23{,}04}{4000 \cdot 6} = 6{,}743 \text{ kN}.$$

Pe rigle, forțele tăietoare se calculează obișnuit. Valorile lor sînt trecute direct în diagrama finală T.

Verificarea echilibrului pe orizontală;

$$\sum X_i = T_1 + T_2 - 8 = 1{,}249 + 6{,}743 - 8 \simeq 0.$$

Problema 16.5. La structura din figura 16.5, să se traseze diagrama de moment încovoietor, atît prin calculul de ordinul I cît și prin calculul de ordinul II. Se dau: $P_1 = 0{,}05\ EI$, $P_2 = 0{,}12\ EI$ și $H = 6$ kN.

Calculul de ordinul I

Rezolvarea se efectuează prin operarea în două etape. Forțele fiind aplicate în noduri, diagrama $M_p^f \equiv 0$. Cadrul avînd un singur grad de libertate, ecuația de condiție este

$$L_{11} Z_1 + L_{1p} = 0.$$

Încărcînd sistemul de bază cu deplasarea elastică $Z_1 = 1$, rezultă diagrama m_1. Valorile momentelor încovoietoare au fost calculate

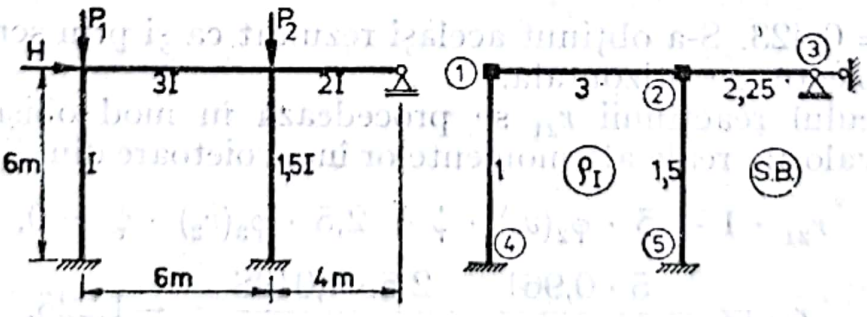


Fig. 16.5

funcție de coeficienții de rigiditate, notați cu ρ_I, în figura 16.5, și s-au determinat pentru $i_0 = \frac{EI}{6} = 1$.

Echilibrînd momentele încovoietoare din diagrama m_1, printr-o operație Cross, se obține diagrama m_1^f din figura 16.6.

Coeficientul necunoscutei, L_{11} și termenul liber, L_{1p}, sînt:

$$L_{11} = -(0{,}817 + 0{,}906 + 1{,}365 + 1{,}227) \cdot \frac{1}{6} = -0{,}719,$$

$$L_{1p} = 6,$$

iar necunoscuta Z_1 are valoarea

$$Z_1 = -\frac{L_{1p}}{L_{11}} = \frac{6}{0{,}719} = 8{,}343.$$

Momentele încovoietoare finale se obțin cu relația $M_I = m_1^f Z_1$ și sînt înscrise direct pe diagrama din figura 16.6.

Calculul de ordinul II

În calculul de ordinul II vor fi corectați coeficienții de rigiditate pentru stîlpi și coeficienții de transmitere ai momentelor încovoietoare

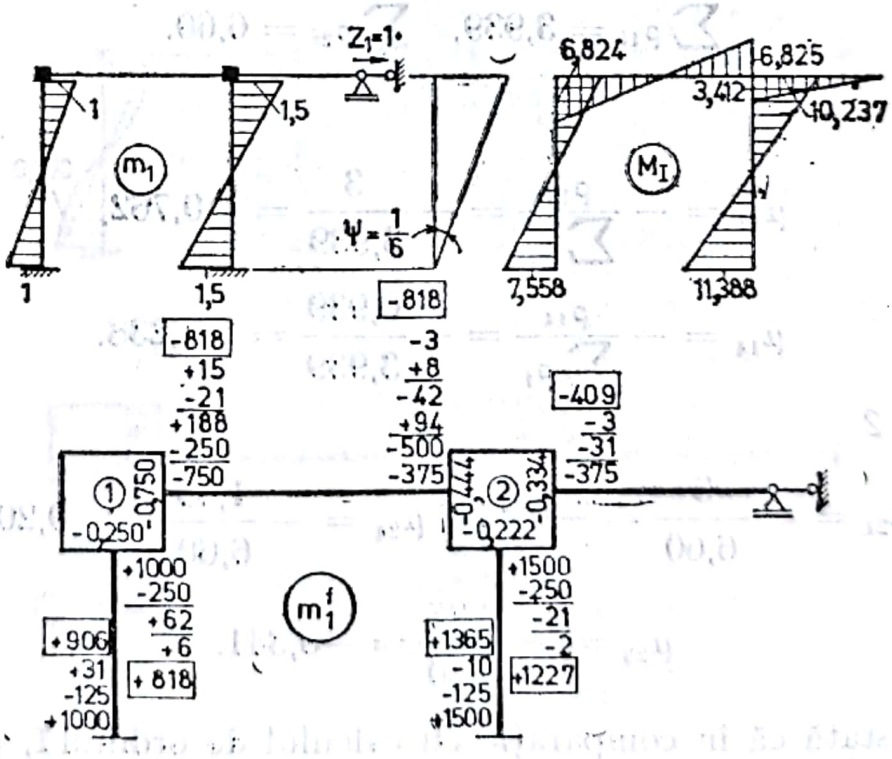


Fig. 16.6

funcție de parametrii de încărcare axială. Acești parametri au valorile:

$$v_1 = l\sqrt{\frac{P_1}{EI_1}} = 6\sqrt{\frac{0{,}05\ EI}{EI}} = 1{,}34,$$

$$v_2 = l\sqrt{\frac{P_2}{EI_2}} = 6\sqrt{\frac{0{,}12\ EI}{1{,}5\ EI}} = 1{,}697.$$

Coeficienții de rigiditate corectați, în vederea calculului coeficienților de distribuție, sînt:

$$\rho'_{14} = \rho_{14}\varphi_2(v_1) = 1 \cdot 0{,}939 = 0{,}939,$$

$$\rho'_{25} = \rho_{25}\varphi_2(v_2) = 1{,}5 \cdot 0{,}900 = 1{,}350.$$

Coeficienții de rigiditate corectați, pentru calculul momentelor încovoietoare pe barele sistemului de bază, încărcat cu translații pe direcția gradului de libertate, sînt:

$$\rho''_{14} = \rho_{14}\varphi_4(v_1) = 1 \cdot 0{,}970 = 0{,}970,$$

$$\rho''_{25} = \rho_{25}\varphi_4(v_2) = 1{,}5 \cdot 0{,}951 = 1{,}426.$$

Cu aceste valori, coeficienții de distribuție devin:

$$\sum_1 \rho_{1i} = 3{,}939, \quad \sum_2 \rho_{2i} = 6{,}60.$$

Nodul 1

$$\mu_{12} = -\frac{\rho_{12}}{\sum \rho_1} = -\frac{3}{3{,}939} = -0{,}762,$$

$$\mu_{14} = -\frac{\rho_{14}}{\sum \rho_1} = -\frac{0{,}939}{3{,}939} = -0{,}238.$$

Nodul 2

$$\mu_{21} = -\frac{3}{6{,}60} = -0{,}454, \quad \mu_{24} = -\frac{1{,}35}{6{,}60} = -0{,}205,$$

$$\mu_{23} = -\frac{2{,}25}{6{,}60} = -0{,}341.$$

Se constată că în comparație cu calculul de ordinul I, coeficienții de distribuție pentru stîlpi sînt mai mici ca urmare a reducerii rigi-

Scanned with OKEN Scanner

dităţii datorită efectului forţelor axiale, fapt confirmat de valorile coeficienţilor de rigiditate ai stîlpilor.

Coeficienţii de transmitere ai momentelor încovoietoare de pe rigle rămîn egali cu 0,5, iar cei de pe stîlpi sînt:

$$t''_{41} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi_3(v_1)}{\varphi_2(v_1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}032}{0{,}939} = 0{,}550,$$

$$t''_{52} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi_3(v_2)}{\varphi_2(v_2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}053}{0{,}900} = 0{,}585.$$

Momentele încovoietoare pe stîlpi, produse de deplasarea elastică $Z_1 = 1$, sînt înscrise în diagrama m_1 din figura 16.7 şi au valorile:

$$m_{14} = m_{41} = 6\rho''_{14}\psi_{14} = 6 \cdot 0{,}970 \cdot \frac{1}{6} = 0{,}970,$$

$$m_{25} = m_{52} = 6\rho''_{25}\psi_{25} = 6 \cdot 1{,}426 \cdot \frac{1}{6} = 1{,}426.$$

Operaţia de iterare se conduce ca şi în calculul de ordinul I.

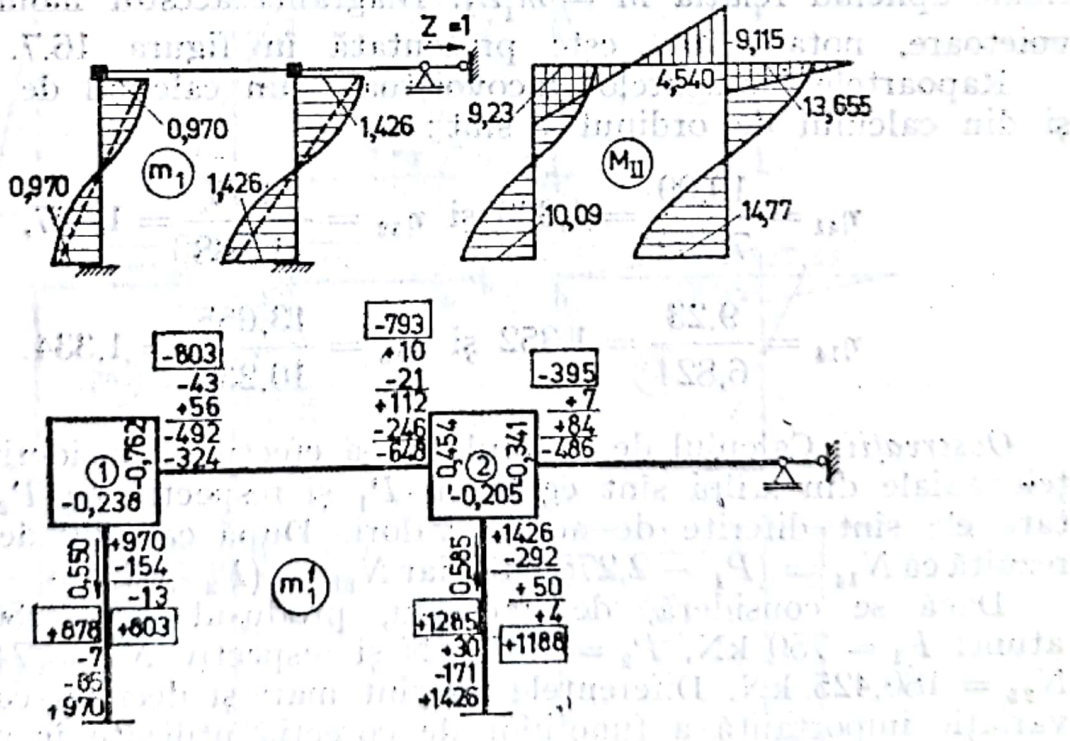


Fig. 16.7

Coeficientul necunoscutei și termenul liber sînt:

$$L_{11} = L_{11}^{M} + L_{11}^{P},$$

$$L_{11} = -(0{,}878 + 0{,}803 + 1{,}285 + 1{,}188) \cdot \frac{1}{6} +$$

$$+ 1{,}34^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + 1{,}697^2 \cdot 1{,}5 \cdot \frac{1}{36} = -0{,}522.$$

Același rezultat se obține scriind condiția de echilibru sub forma ecuației de proiecții pe orizontală;

$$r_{11} = (0{,}878 + 0{,}803)\,\frac{1}{6}\,\eta_2(v_1) + (1{,}285 + 1{,}188)\,\frac{1}{6}\,\eta_2(v_2) = 0{,}522.$$

Se verifică $r_{11} = -L_{11}$.

$$L_{1p} = 6.$$

Rezultă

$$Z_1 = \frac{6}{0{,}522} = 11{,}494.$$

Cu valoarea Z_1 determinată se obțin momentele încovoietoare finale aplicînd relația $M = m_1^f Z_1$. Diagrama acestor momente încovoietoare, notată M_{II}, este prezentată în figura 16.7.

Rapoartele momentelor încovoietoare din calculul de ordinul II și din calculul de ordinul I sînt:

$$\eta_{41} = \frac{10{,}09}{7{,}559} = 1{,}335 \text{ și } \eta_{52} = \frac{14{,}77}{11{,}388} = 1{,}297,$$

$$\eta_{14} = \frac{9{,}23}{6{,}824} = 1{,}352 \text{ și } \eta_{25} = \frac{13{,}655}{10{,}237} = 1{,}334.$$

Observații. Calculul de ordinul II s-a efectuat considerînd că forțele axiale din stîlpi sînt egale cu P_1 și respectiv cu P_2. În realitate ele sînt diferite de aceste valori. După calculul de ordinul I rezultă că $N_{14} = (P_1 - 2{,}275)$ kN, iar $N_{25} = (P_2 + 2{,}275 - 0{,}85)$ kN.

Dacă se consideră, de exemplu, produsul $EI = 15000$ kNm², atunci $P_1 = 750$ kN, $P_2 = 1800$ kN și respectiv $N_{14} = 747{,}725$ kN, $N_{25} = 180{,}425$ kN. Diferențele nu sînt mari și deci nu conduc la o variație importantă a funcțiilor de corecție utilizate în calculul de ordinul II.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă după primul ciclu de calcul de ordinul II se evaluează forţele axiale din stîlpi, ele rezultă: $N_{14} = P_1 - 3{,}057 = 746{,}943$ kN şi $N_{25} = P_2 + 3{,}057 - 1{,}14 = 1801{,}917$ kN.

În cazul riglei 1–2, aceasta nu se consideră încărcată axial, deşi după calculul de ordinul I se obţine $N_{12} = 3{,}604$ kN. În condiţiile de mai sus rezultă $v_{12} = 6\sqrt{\dfrac{3{,}604}{3 \cdot 15000}} = 4{,}805 \cdot 10^{-4}$. Funcţiile de corecţie au valoarea egală cu 1. Deci se poate adopta $v_{12} = 0$.

Problema 16.6. Să se traseze diagramele de moment încovoietor, de forţă axială şi de forţă tăietoare la structura din figura 16.8, prin calculul de ordinul I şi calculul de ordinul II. Se dau: $EI = 18000$ kNm², $P_1 = 600$ kN şi $P_2 = 750$ kN.

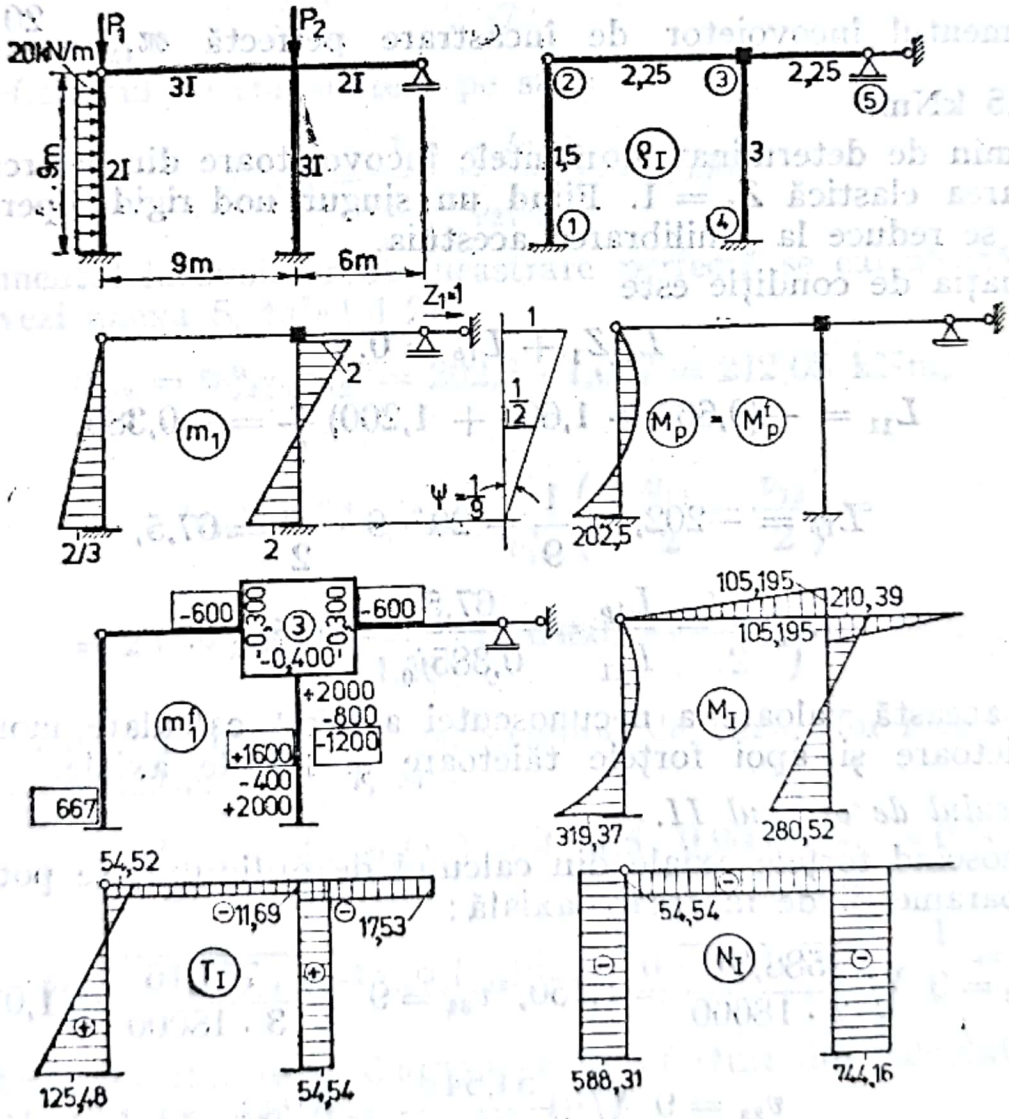


Fig. 16.8

Scanned with OKEN Scanner

Calculul de ordinul I.

Schemele de calcul şi diagramele finale sînt prezentate în figura 16.8. Se utilizează, pentru rezolvare, procedeul operării în două etape. Coeficienţii de rigiditate ai barelor s-au calculat considerînd

$$i_0 = \frac{EI}{9} = 1.$$

Coeficienţii de distribuţie:

$$\mu_{32} = -\frac{\rho_{32}}{\sum \rho_3} = -\frac{2{,}25}{7{,}50} = -0{,}300, \quad \mu_{35} = \mu_{32} = -0{,}300,$$

$$\mu_{34} = -\frac{\rho_{34}}{\sum \rho_3} = -\frac{3}{7{,}50} = -0{,}400.$$

Momentul încovoietor de încastrare perfectă $\mathfrak{M}_{12} = \frac{20 \cdot 9^2}{8} =$ $= 202{,}5$ kNm.

Rămîn de determinat momentele încovoietoare din încărcarea cu deplasarea elastică $Z_1 = 1$. Fiind un singur nod rigid, operaţia de iterare se reduce la echilibrarea acestuia.

Ecuaţia de condiţie este

$$L_{11}Z_1 + L_{1p} = 0.$$

$$L_{11} = -(0{,}667 + 1{,}600 + 1{,}200)\frac{1}{9} = -0{,}385,$$

$$L_{1p} = -202{,}5 \cdot \frac{1}{9} + 20 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} = 67{,}5,$$

$$Z_1 = -\frac{L_{1p}}{L_{11}} = \frac{67{,}5}{0{,}385 i_0} = 175{,}325.$$

Cu această valoare a necunoscutei au fost calculate momentele încovoietoare şi apoi forţele tăietoare şi forţele axiale.

Calculul de ordinul II.

Cunoscînd forţele axiale din calculul de ordinul I, se pot determina parametrii de încărcare axială:

$$v_{12} = 9\sqrt{\frac{588{,}31}{2 \cdot 18000}} = 1{,}150, \quad v_{34} = 9\sqrt{\frac{744{,}16}{3 \cdot 18000}} = 1{,}056,$$

$$v_{23} = 9\sqrt{\frac{54{,}54}{3 \cdot 18000}} = 0{,}286.$$

Scanned with OKEN Scanner

Coeficienţii de rigiditate ρ' sînt:

$$\rho'_{12} = \rho_{12}\ \varphi_1(v_{12}) = 1{,}5 \cdot 0{,}9083 = 1{,}362,$$

$$\rho'_{23} = \rho_{23}\ \varphi_1(v_{23}) = 2{,}25 \cdot 0{,}9936 = 2{,}236,$$

$$\rho'_{34} = \rho_{34}\ \varphi_2(v_{34}) = 3 \cdot 0{,}962 = 2{,}886.$$

Coeficienţii de distribuţie din nodul 3:

$$\sum_3 \rho_{3i} = 2{,}236 + 2{,}886 + 2{,}25 = 7{,}372,$$

$$\mu_{32} = -\frac{2{,}236}{7{,}372} = -0{,}303,\quad \mu_{34} = -\frac{2{,}886}{7{,}372} = -0{,}392,$$

$$\mu_{35} = -\frac{2{,}25}{7{,}372} = -0{,}305.$$

Coeficientul de transmitere pe stîlp

$$t''_{43} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi_3(v_{34})}{\varphi_2(v_{34})} = 0{,}530.$$

Momentul încovoietor de încastrare perfectă se calculează cu relaţia (vezi anexa 5, tabelul 2):

$$\mathfrak{M}_{12} = \mathfrak{M}^0_{12}\gamma_3(v_{12}) = 202{,}5 \cdot 1{,}047 = 212{,}08\ \text{kNm},$$

unde

$$\gamma_3(v_{12}) = 24\varphi_1(v_{12}) \cdot \frac{1}{v_{12}^3}\left(\operatorname{tg}\frac{v_{12}}{2} - \frac{v_{12}}{2}\right) =$$

$$= 24 \cdot 0{,}9083 \cdot \frac{1}{1{,}15^3}\left(0{,}64805 - \frac{1{,}15}{2}\right) = 1{,}047.$$

Momentele încovoietoare pe sistemul de bază, din încărcarea cu deplasarea elastică $Z_1 = 1$, sînt:

$$m_{12} = 4\rho''_{12}\psi_{12} = 4\rho_{12}\varphi_1(v_{12}) = 4 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}9083 \cdot \frac{1}{9} = 0{,}605,$$

$$m_{34} = m_{43} = 6\rho''_{34}\psi_{34} = 4\rho_{34}\varphi_4(v_{34})\,\psi_{34} = 6 \cdot 3 \cdot 0{,}9813 \cdot \frac{1}{9} = 1{,}963.$$

Schema de iterare şi diagramele de eforturi din calculul de ordinul II, sînt prezentate în figura 16.9.

Scanned with OKEN Scanner

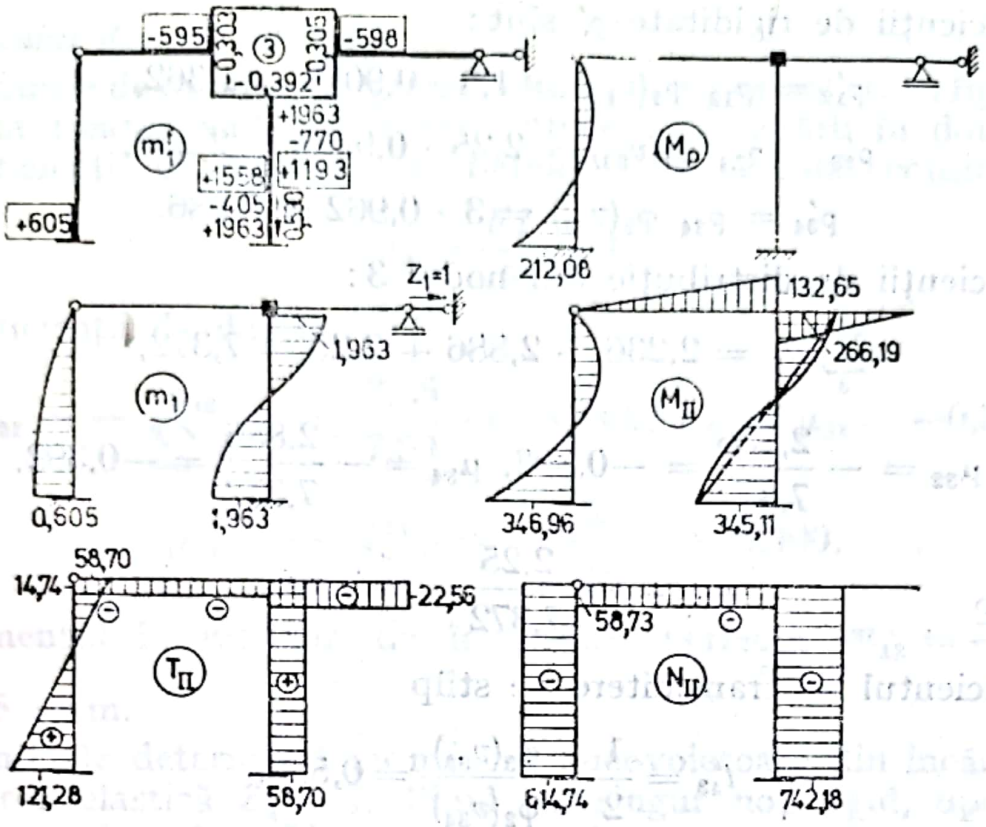


Fig. 16.9

Ecuația de condiție este

$$L_{11}Z_1 + L_{1p} = 0.$$

$$L_{11} = -(0{,}605 + 1{,}193 + 1{,}558)\,\frac{1}{9} + 1{,}15^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{9^2} +$$

$$+ 1{,}05^2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{9^2} = -0{,}298,$$

$$L_{1p} = -212{,}80 \cdot \frac{1}{9} + 20 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} = 66{,}435,$$

$$Z_1 = -\frac{L_{1p}}{L_{11}} = \frac{66{,}435}{0{,}298} = 222{,}94.$$

Cunoscînd Z_1, s-a trasat diagrama de moment încovoietor. Forțele tăietoare sînt:

$$T_{12} = 90 + 38{,}551 - 7{,}286 = 121{,}265 \text{ kN},$$

Scanned with OKEN Scanner

$$T_{34} = T_{43} = \frac{345{,}11 + 266{,}19}{9} - \frac{744{,}16 \cdot 222{,}94}{2000} \cdot \frac{1}{9} =$$

$$= 67{,}92 - 9{,}22 = 58{,}70 \text{ kN},$$

$$T_{23} = T_{32} = \frac{132{,}65}{9} = 14{,}739 \text{ kN},$$

$$T_{35} = T_{53} = \frac{133{,}54}{6} = 22{,}257 \text{ kN}.$$

Observație. Forțele tăietoare s-au calculat luînd în considerație și efectul forțelor axiale și anume $\frac{N_j Z_i}{i_0 l_j}$, unde factorul $\frac{1}{i_0}$ ține seama de faptul că Z_i a fost calculat pentru $i_0 = 1$.

Comparativ cu calculul de ordinul I, rezultă următoarele rapoarte ale momentelor încovoietoare:

$$\eta_{12} = \frac{346{,}96}{319{,}37} = 1{,}086,$$

$$\eta_{34} = \frac{266{,}19}{210{,}39} = 1{,}265, \quad \eta_{43} = \frac{345{,}11}{280{,}52} = 1{,}230.$$

Forțele tăietoare și forțele axiale nu înregistrează diferențe prea mari și de aceea calculul nu se mai reface, considerîndu-se satisfăcătoare rezultatele obținute în acest ciclu.

Problema 16.7. Să se traseze diagramele de eforturi M, T și N, prin calcul de ordinul I și calcul de ordinul *II*, la structura din figura 16.10. Se dă $EI = 10000$ kNm².

Calculul de ordinul I

Coeficienții de rigiditate ai barelor au fost calculați considerînd $i_0 = \frac{EI}{8} = 1$.

Se utilizează metoda de calcul în două etape.

Coeficienții de distribuție:

$$\sum_2 \rho_{2i} = 6, \quad \sum_3 \rho_{3i} = 8{,}4.$$

Scanned with OKEN Scanner

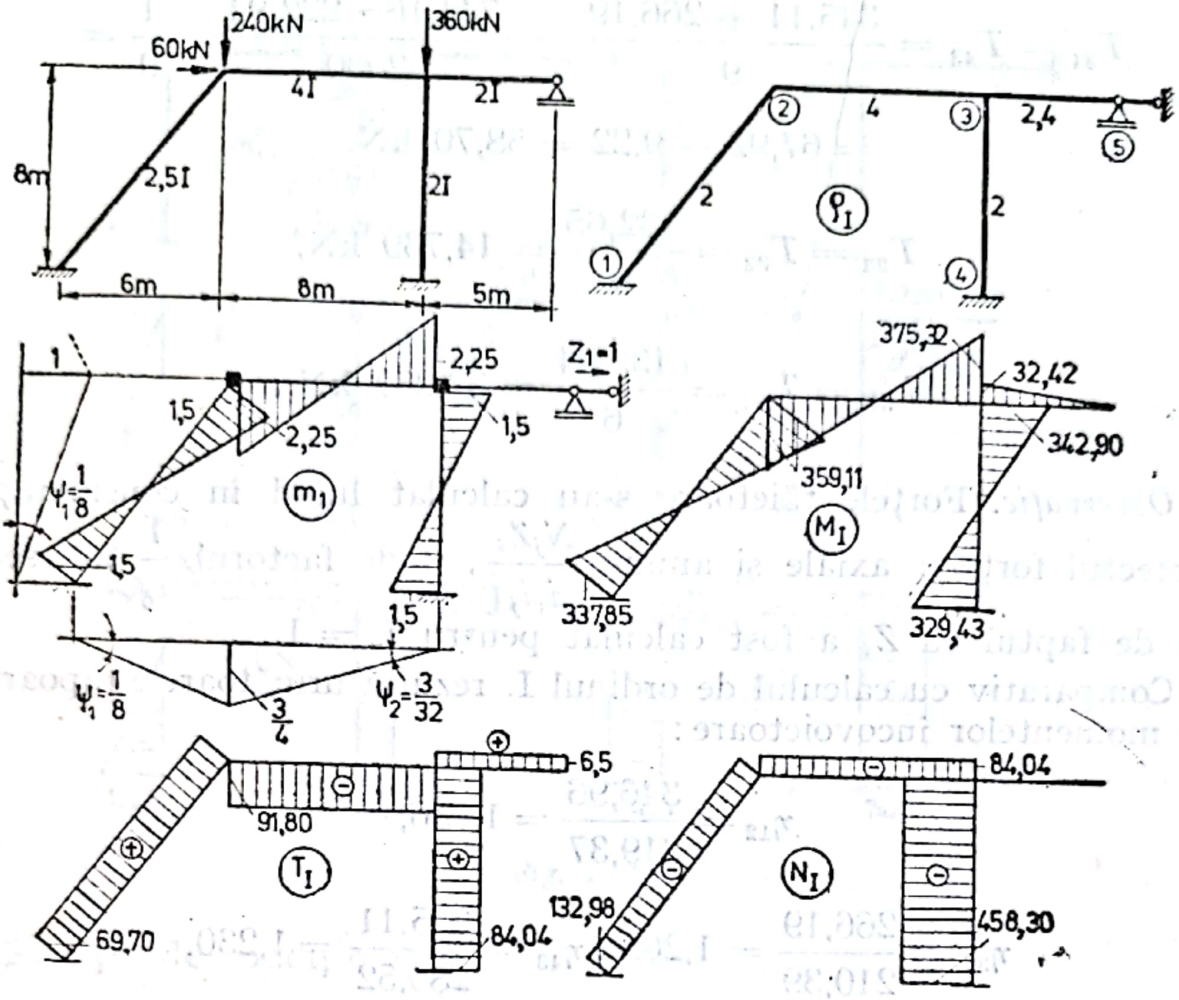


Fig. 16.10.

Nodul 2

$$\mu_{21} = -\frac{2}{6} = -0{,}334, \quad \mu_{23} = -\frac{4}{6} = -0{,}666.$$

Nodul 3

$$\mu_{32} = -\frac{4}{8{,}4} = -0{,}476, \quad \mu_{34} = -\frac{2}{8{,}4} = -0{,}238,$$

$$\mu_{35} = -\frac{2{,}4}{8{,}4} = -0{,}286.$$

Forţele fiind aplicate în noduri, rezultă $M_p = 0$.

Din încărcarea sistemului de bază cu deplasarea elastică $Z_1 = 1$, rezultă diagrama m_1. Momentele încovoietoare din această diagramă sînt echilibrate prin metoda Cross, în schema din figura 16.11.

Scanned with OKEN Scanner

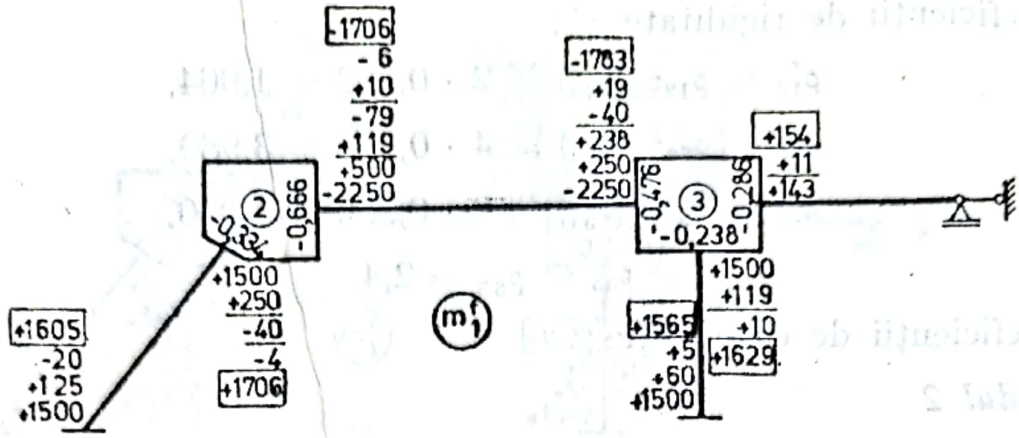


Fig. 16.11

Ecuația de condiție se scrie $L_{11}Z_1 + L_{1p} = 0$.

$$L_{11} = -(1{,}605 + 1{,}706 + 1{,}565 + 1{,}629)\,\frac{1}{8} - (1{,}706 + 1{,}783)\,\frac{3}{32} =$$

$$= -1{,}140,$$

$$L_{1p} = 60 \cdot 1 + 240 \cdot \frac{3}{4} = 240,$$

$$Z_1 = -\frac{L_{1p}}{L_{11}} = \frac{240}{1{,}140} = 210{,}50.$$

Cu această valoare s-a calculat diagrama M_I și apoi diagramele T_I și N_I.

Calculul de ordinul II

Parametrii de încărcare axială ai barelor:

$$v_{12} = 10\sqrt{\frac{132{,}98}{2{,}5 \cdot 10000}} = 0{,}729,$$

$$v_{23} = 8\sqrt{\frac{84{,}04}{4 \cdot 10000}} = 0{,}367,$$

$$v_{34} = 8\sqrt{\frac{458{,}30}{2 \cdot 10000}} = 1{,}210.$$

Scanned with OKEN Scanner

Coeficienții de rigiditate ρ':

$$\rho'_{12} = \rho_{12}\varphi_2(v_{12}) = 2 \cdot 0{,}982 = 1{,}964,$$
$$\rho'_{23} = \rho_{23}\varphi_2(v_{23}) = 4 \cdot 0{,}995 = 3{,}980,$$
$$\rho'_{34} = \rho_{34}\varphi_2(v_{34}) = 2 \cdot 0{,}950 = 1{,}900,$$
$$\rho'_{35} = \rho_{35} = 2{,}4.$$

Coeficienții de distribuție:

Nodul 2

$$\mu_{21} = -\frac{1{,}964}{5{,}944} = -0{,}330, \quad \mu_{23} = -\frac{3{,}980}{5{,}944} = -0{,}670.$$

Nodul 3

$$\mu_{32} = -\frac{3{,}980}{8{,}280} = -0{,}481, \quad \mu_{35} = -\frac{2{,}4}{8{,}280} = -0{,}290,$$
$$\mu_{34} = -\frac{1{,}900}{8{,}280} = -0{,}229.$$

Momentele încovoietoare de încastrare perfectă pe sistemul de bază, din încărcarea acestuia cu deplasarea elastică $Z_1 = 1$, sînt:

$$m_{12} = m_{21} = 6\rho''_{12}\psi_{12} = 6\rho_{12}\varphi_4(v_{12})\psi_{12} = 6 \cdot 2 \cdot 0{,}991 \cdot \frac{1}{8} = 1{,}486,$$

$$m_{23} = m_{32} = 6\rho''_{23}\psi_{23} = 6 \cdot 4 \cdot 0{,}998 \cdot \frac{3}{32} = 2{,}245,$$

$$m_{34} = m_{43} = 6\rho''_{34}\psi_{34} = 6 \cdot 2 \cdot 0{,}975 \cdot \frac{1}{8} = 1{,}462.$$

Schema de iterare este prezentată în figura 16.12.
Ecuația de condiție se scrie

$$L_{11}Z_1 + L_{1p} = 0.$$

$$L_{11} = -(1{,}590 + 1{,}692 + 1{,}527 + 1{,}593)\frac{1}{8} - (1{,}692 + 1{,}758)\frac{3}{32} +$$
$$+ 360 \cdot 1 \cdot \frac{1}{i_0} \cdot \frac{1}{8} = -1{,}087,$$

$$L_{1p} = 60 \cdot 1 + 240 \cdot \frac{3}{4} = 240.$$

Scanned with OKEN Scanner

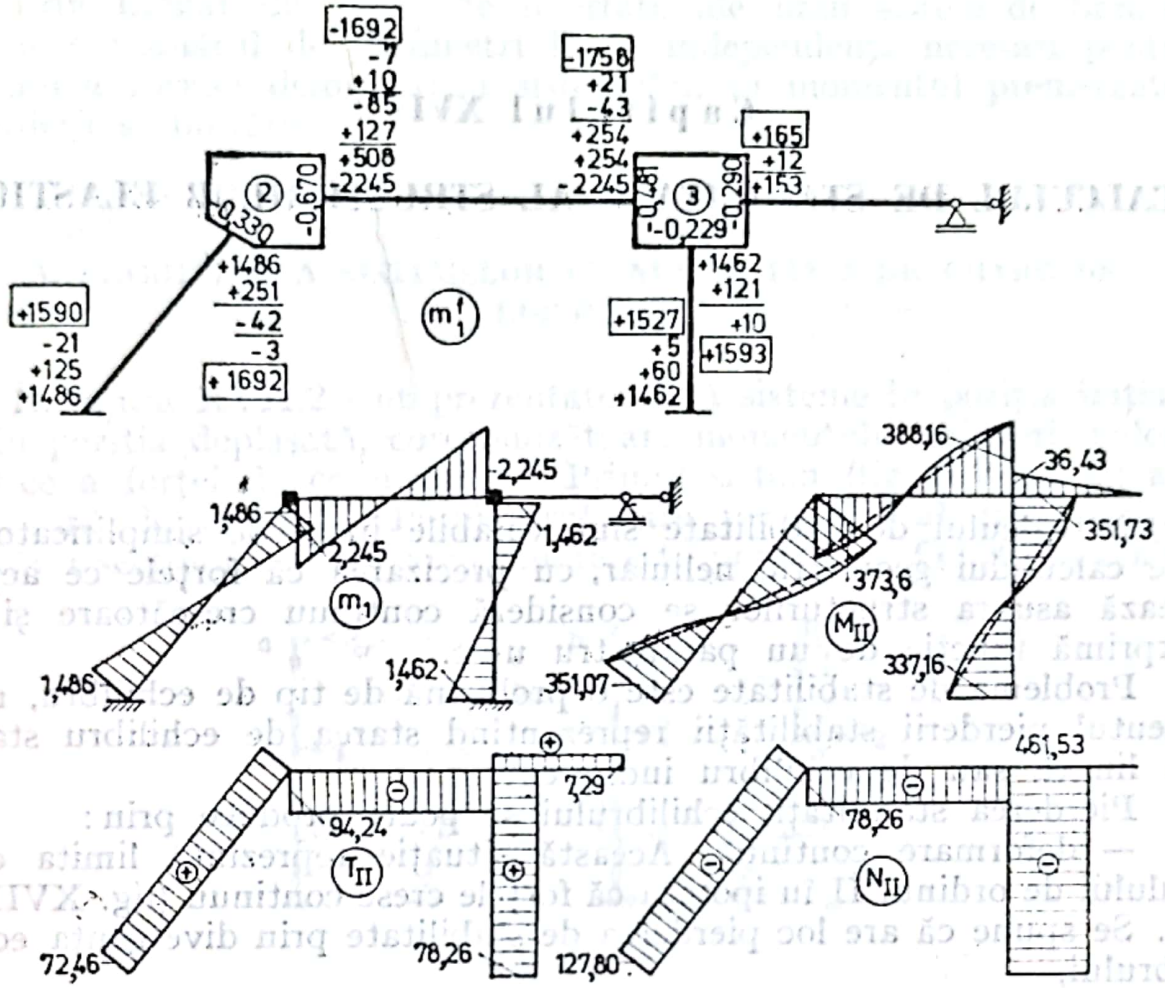


Fig. 16.12

Valoarea necunoscutei este

$$Z_1 = -\frac{L_{1p}}{L_{11}} = 220{,}80.$$

Diagramele de eforturi, calculate pentru această valoare a deplasării Z_1, sînt cuprinse în figura 16.12.

Observații. Se constată că variațiile coeficienților de rigiditate, coeficienților de distribuție și eforturilor în barele 1-2 și 2-3, în calculul de ordinul II, nu sînt importante, ca urmare a faptului că parametrii de încărcare axială ai acestor bare sînt mici, iar funcțiile de corecție au valori apropiate de valoarea 1, corespunzătoare calculului de ordinul I, unde $v_{ij} = 0$.

Se obișnuiește ca pentru rigle să se considere $v = 0$, fără a afecta prea mult exactitatea calculului.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XVII

CALCULUL DE STABILITATE AL STRUCTURILOR ELASTICE

În calculul de stabilitate sînt valabile ipotezele simplificatoare ale calculului geometric neliniar, cu precizarea că forţele ce acţionează asupra structurilor se consideră continuu crescătoare şi se exprimă funcţie de un parametru unic.

Problema de stabilitate este o problemă de tip de echilibru, momentul pierderii stabilităţii reprezentînd starea de echilibru stabil la limită sau de echilibru indiferent.

Pierderea stabilităţii echilibrului se poate produce prin:

— deformare continuă. Această situaţie reprezintă limita calculului de ordinul II în ipoteza că forţele cresc continuu (fig. XVII.1, a). Se spune că are loc pierderea de stabilitate prin divergenţa echilibrului,

— bifurcarea echilibrului. Această situaţie se produce prin trecerea bruscă a structurii din poziţia iniţială, în care barele sînt solicitate numai la compresiune, în poziţia uşor deformată prin încovoiere, după care, dacă forţele cresc în continuare, structura capătă deplasări mari şi se distruge. Valoarea forţelor, corespunzătoare momentului pierderii stabilităţii, se numeşte valoare critică (fig. XVII. 1, b).

În acest capitol se studiază problema stabilităţii sistemelor cu număr finit şi cu număr infinit de grade de libertate.

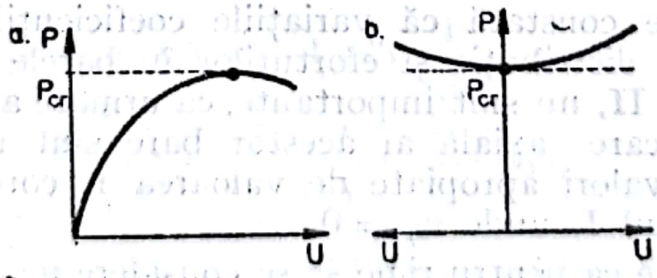


Fig. XVII.1

Prin număr de grade de libertate ale unui sistem de bare se înțelege numărul de parametri liniar independenți necesari pentru definirea formei deformate a sistemului, în momentul premergător pierderii stabilității.

A. STABILITATEA SISTEMELOR CU NUMĂR FINIT DE GRADE DE LIBERTATE

În figura XVII.2 sînt prezentate două sisteme în poziția inițială și în poziția deplasată, corespunzătoare momentului atingerii valorii critice a forței de compresiune. Primul sistem (fig. XVII.2, a) are un grad de libertate. Parametrul care permite stabilirea poziției oricărei secțiuni a barei comprimate este unghiul α. Cel de al doilea

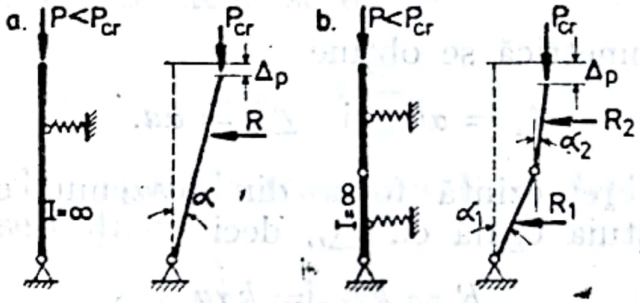


Fig. XVII.2

sistem (fig. XVII.2, b) este un sistem cu două grade de libertate. Parametrii care definesc poziția oricărei secțiuni a barelor comprimate sînt unghiurile α_1 și α_2.

Metodele pentru calculul de stabilitate al sistemelor cu număr finit de grade de libertate, care se prezintă, sînt: metoda statică și metoda energetică. Dintre aceste două metode, metoda energetică are o aplicabilitate mult mai frecventă.

APLICAȚII

Problema 17.1. Să se determine forța critică de pierdere a stabilității pentru sistemul din figura 17.1, utilizînd succesiv metoda statică și metoda energetică.

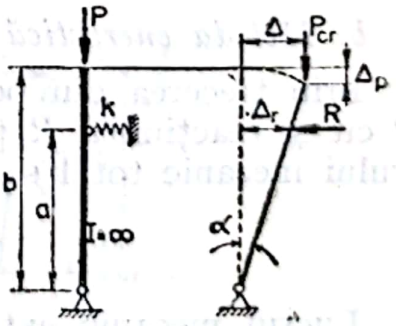


Fig. 17.1

Bara are un singur grad de libertate.

Rigiditatea reazemului elastic este presupusă cunoscută și a fost notată cu litera k.

În situația în care forța P atinge valoarea critică, bara trece din poziția inițială într-o poziție deplasată, apropiată de poziția inițială. Bara fiind infinit rigidă, $I = \infty$, poziția deplasată este caracterizată prin unghiul α. Prin această deplasare, reazemul elastic se deformează, în el apărînd o forță ce se opune deplasării și menține bara în echilibru, în poziție deplasată.

a. Metoda statică

Condiția de echilibru static a sistemului de forțe ce acționează asupra barei, exprimată printr-o ecuație de momente în raport cu reazemul articulat, are forma

$$P_{cr}\triangle - Ra = 0.$$

Din relația geometrică se obține

$$\triangle = \alpha b \quad \text{și} \quad \triangle_r = \alpha a.$$

Reacțiunea R reprezintă forța din reazemul elastic pentru o deformație a acestuia egală cu $\triangle_r$, deci

$$R = k\triangle_r = k\alpha a.$$

În consecință pentru forța critică rezultă expresia

$$P_{cr} = \frac{Ra}{\triangle} = \frac{ka^2}{b}.$$

Se constată că parametrul α nu intervine în expresia forței critice. În fapt el rămîne nedeterminat și ca atare deplasările nu pot fi calculate. Se obține numai poziția deplasată, fără a se cunoaște mărimile deplasărilor punctelor în situația de echilibru limită.

b. Metoda energetică

Prin trecerea din poziția inițială în poziția deplasată, atît forța P cît și reacțiunea R produc lucru mecanic. Conform teoremei lucrului mecanic total se obține

$$L_{tot} = L_{ext} + L_{int} = 0.$$

Lucrul mecanic exterior este $L_{ext} = P_{cr}\triangle_p$, iar $L_{int} = -\frac{1}{2} R\triangle_r$.

Scanned with OKEN Scanner

În expresia lucrului mecanic exterior nu apare termenul $\frac{1}{2}$ deoarece forța P_{cr} parcurge deplasarea $\triangle_p$ cu întreaga sa intensitate, în timp ce expresia lucrului mecanic interior conține termenul $\frac{1}{2}$, deoarece reacțiunea R este inițial egală cu zero și crește pînă la valoarea finală, în același timp cu deplasarea $\triangle_r$. În plus, lucrul mecanic interior este lucru mecanic rezistent și deci apare afectat cu semnul minus.

Deplasarea $\triangle_p$ are expresia

$$\triangle_p = b - b\cos\alpha = b(1 - \cos\alpha).$$

Dezvoltînd $\cos\alpha$ în serie, $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \ldots\ldots$ și reținînd numai primii doi termeni, se obține

$$\triangle_p = b\frac{\alpha^2}{2}.$$

Ținînd seama de expresiile reacțiunii R și deplasării $\triangle_r$, stabilite mai înainte, se obține

$$P_{cr}b\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{2}k\alpha^2a^2 = 0,$$

de unde, prin simplificarea cu $\frac{\alpha^2}{2}$, rezultă $P_{cr} = \frac{ka^2}{b}$, deci aceeași valoare ca și prin metoda statică.

Problema 17.2. Să se determine forța critică de pierdere a stabilității, la sistemul din figura 17.2.

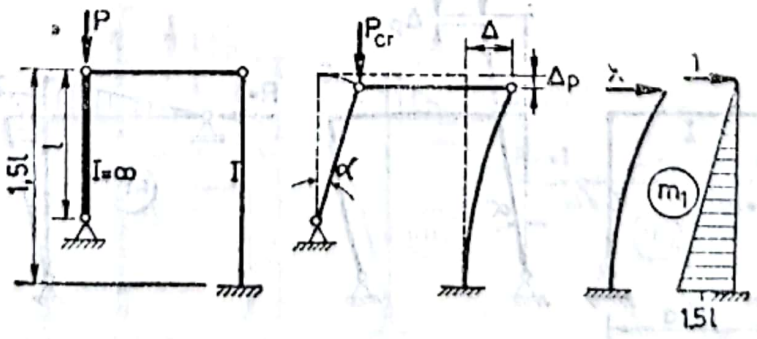


Fig. 17.2

În acest caz reazemul elastic al barei infinit rigide este reprezentat de sistemul format din cele două bare flexibile. În poziția deplasată stîlpul se deformează sub acțiunea efortului axial din rigla orizontală, notat cu X.

Pentru rezolvare se utilizează relația $L_{ext} + L_{int} = 0$;

$$L_{ext} = P_{cr} \triangle_p = P_{cr} l \frac{\alpha^2}{2},$$

$$L_{int} = -\frac{1}{2} R \triangle.$$

Se observă că $\triangle = \alpha l$ sau $\triangle = \delta_{11} R$, de unde rezultă

$$R = \frac{\triangle}{\delta_{11}} = \frac{\alpha l}{\delta_{11}}, \text{ iar } \delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} \, dx.$$

Deplasarea unitară $\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}5l \cdot 1{,}5l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1{,}5l = 1{,}125 \frac{l^3}{EI}$

și rezultă $R = \frac{\alpha EI}{1{,}125 l^2}$, iar apoi $L_{int} = -\frac{\alpha^2 EI}{2{,}25l}$.

Din egalitatea celor două lucruri mecanice se obține expresia forței critice

$$P_{cr} = \frac{EI}{1{,}125 l^2}.$$

Problema 17.3. Să se determine forța critică de pierdere a stabilității, la sistemul din figura 17.3.

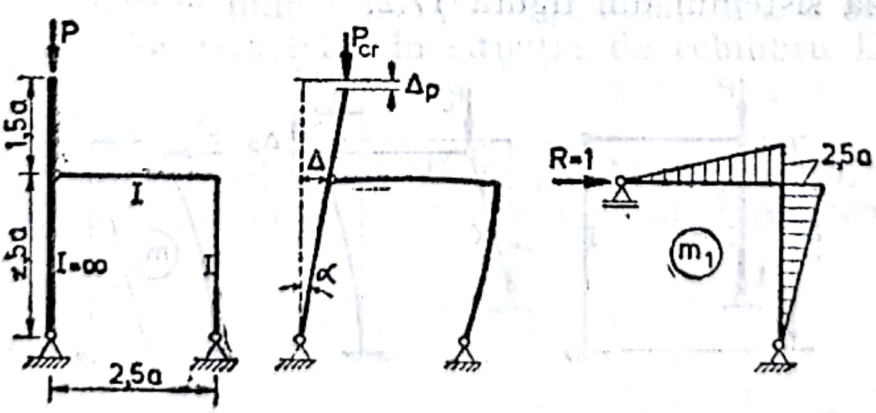


Fig. 17.3

Lucrul mecanic exterior

$$L_{ext} = P_{cr}\triangle_p = P_{cr}2a\alpha^2.$$

Lucrul mecanic interior

$$L_{int} = -\frac{1}{2}R\triangle = -\frac{1}{2}\frac{\triangle^2}{\delta_{11}}, \text{ unde s-a înlocuit } R = \frac{\triangle}{\delta_{11}}.$$

Deplasarea $\triangle = 2{,}5a\alpha$, iar deplasarea unitară se obține din integrarea diagramei m_1 cu ea însăși:

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2{,}5a\cdot 2{,}5a\cdot\frac{2}{3}\cdot 2{,}5a = \frac{31{,}25a^3}{3EI}.$$

Cu aceste valori, L_{int} devine

$$L_{int} = -\frac{18{,}75\alpha^2 EI}{62{,}50a}.$$

Egalînd expresiile lucrurilor mecanice, se obține

$$P_{cr} = \frac{0{,}15EI}{a^2}.$$

Problema 17.4. Să se determine forța critică de pierdere a stabilității, la sistemul din figura 17.4.

Lucrul mecanic exterior

$$L_{ext} = P_{cr}\triangle_p = P_{cr}2a\alpha^2.$$

Lucrul mecanic interior

$$L_{int} = -\frac{1}{2}(R_1\triangle_1 + R_2\triangle_2) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\triangle_1^2}{\delta_{11}} + \frac{\triangle_2^2}{\delta_{22}}\right),$$

unde s-a ținut seama că $\triangle_1 = \delta_{11}R_1$ și $\triangle_2 = \delta_{22}R_2$.

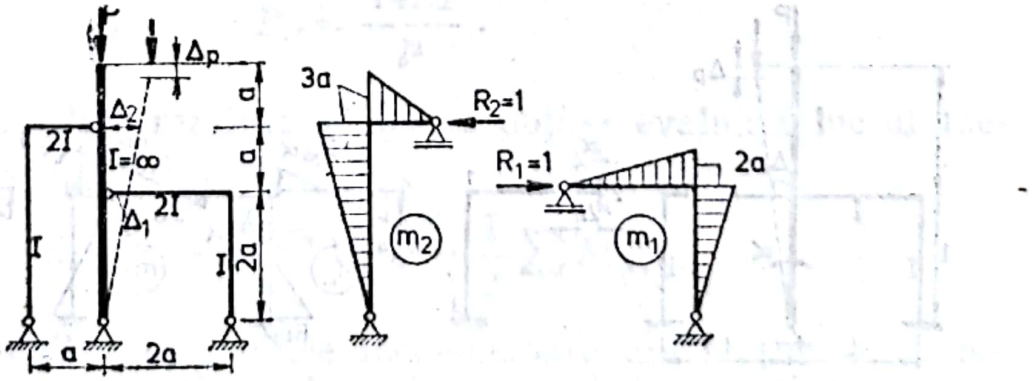


Fig. 17.4

În continuare rezultă:

$$\triangle_1 = 2a\alpha, \quad \triangle_2 = 3a\alpha,$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{4a}{3} \cdot 2a = \frac{4a^3}{EI},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 3a \cdot \frac{2}{3} \cdot 3a + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot 3a \cdot \frac{2}{3} \cdot 3a = \frac{10{,}5a^3}{EI}.$$

Cu aceste elemente, L_{int} devine

$$L_{int} = -\frac{6{,}50\alpha^2 EI}{7a}.$$

Forța critică are valoarea

$$P_{cr} = \frac{13EI}{28a^2}.$$

Problema 17.5. Să se determine forța critică de pierdere a stabilității, la sistemul din figura 17.5.

În acest caz elementele elastice ale sistemului sînt legate rigid de bara infinit rigidă. Fiecare dintre ele reprezintă, în poziția inițială, un cadru cu noduri fixe. La trecerea în poziția deplasată, aceste cadre vor fi încărcate cu deplasările secțiunilor de încastrare cu bara verticală; o rotire α și o translație $\triangle$.

Rezolvarea eficientă, pentru calculul lucrului mecanic interior, se efectuează prin metoda deplasărilor, deoarece conduce la o singură necunoscută, rotirea nodului rigid.

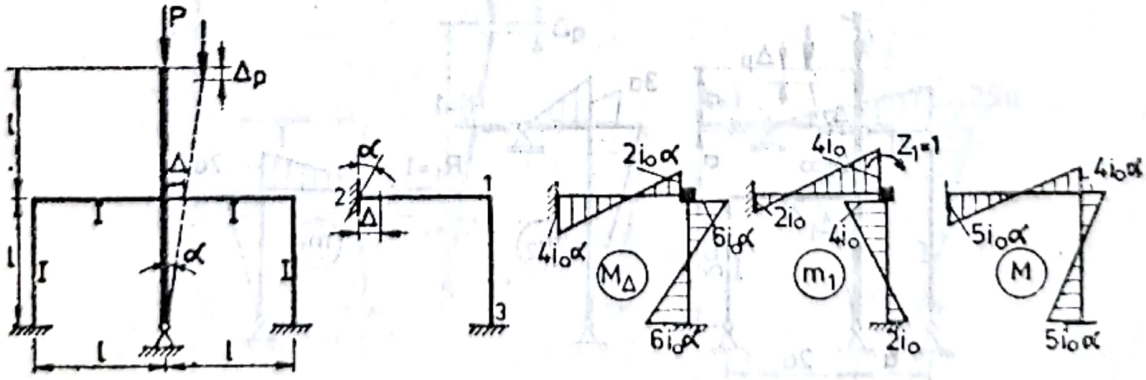


Fig. 17.5

Lucrul mecanic exterior şi lucrul mecanic al eforturilor:

$$L_{ext} = P\triangle_p = P \cdot 2l\,\frac{\alpha^2}{2} = Pl\alpha^2,$$

$$L_{ef} = \frac{1}{2}\int \frac{M_\Delta^2}{EI}\,dx.$$

Pentru calculul diagramei M se rezolvă cadrul cu noduri fixe. Momentele încovoietoare din diagrama M_Δ se obţin astfel:

$$M_{21} = 4i_0\alpha,\ M_{12} = 2i_0\alpha,\ M_{13} = M_{31} = 6i_0\triangle/l = 6i_0\alpha,$$

deoarece $\triangle = \alpha l$.

Ecuaţia de condiţie este

$$8i_0Z_1 - 4i_0\alpha = 0,$$

de unde rezultă $Z_1 = \alpha/2$.

Diagrama M se calculează cu relaţia $M = M_\Delta + m_1Z_1$.

Lucrul mecanic al eforturilor este egal cu de două ori lucrul mecanic obţinut pe un singur cadru, deci

$$L_{ef} = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{EI}\left(\frac{1}{5}\cdot 5i_0\alpha l\cdot\frac{2}{3}\cdot 5i_0\alpha + \frac{1}{2}\cdot 4i_0\alpha l\cdot\frac{2}{3}\cdot 4i_0\alpha - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 5i_0\alpha l\cdot\frac{1}{3}\cdot 4i_0\alpha\right)2\right],$$

$$L_{ef} = \frac{14i_0^2\alpha^2 l}{EI} = \frac{14EI\alpha^2}{l},\ \text{deoarece}\ i_0 = \frac{EI}{l}.$$

Forţa critică are valoarea

$$P_{cr} = \frac{14EI}{l^2}.$$

Observaţie. Acelaşi rezultat se poate obţine evaluînd lucrul mecanic interior cu relaţia

$$L_{int} = -\frac{1}{2}\sum M_k\alpha_k - \frac{1}{2}\sum M_{ij}\psi_{ij},$$

unde M_k reprezintă momentele încovoietoare din secţiunile de încastrare a cadrului elastic în bara infinit rigidă, α_k rotirile acestor

Scanned with OKEN Scanner

secţiuni, M_{ij} momentele încovoietoare pe barele ce se rotesc în situaţia pierderii stabilităţii, iar ψ_{ij} sînt rotirile acestor bare.

$$L_{int} = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot [5i_0\alpha\alpha + (4i_0\alpha + 5i_0\alpha)\alpha] = -14i_0\alpha^2,$$

$$L_{tot} = L_{ext} + L_{int} = P\alpha^2 l - 14i_0\alpha^2 = 0,$$

$$P_{cr} = \frac{14i_0}{l} = \frac{14EI}{l^2},$$

deci s-a obţinut acelaşi rezultat.

Problema 17.6. Să se determine forţa critică de pierdere a stabilităţii, la sistemul din figura 17.6.

Sistemul elastic fiind cu stîlp înclinat, din încărcarea sistemului de bază cu deplasarea $\triangle = 4\alpha$, va apare diagramă de moment încovoietor şi pe riglă (vezi diagrama $M_\triangle$).

Alegînd $i_0 = \frac{EI}{10}$, se obţin rigidităţile practice înscrise direct pe sistemul de bază.

Din încărcarea sistemului de bază cu rotirea $Z_1 = 1$, rezultă diagrama m_1 şi reacţiunea unitară $r_{11} = 28i_0$.

Încărcînd sistemul de bază cu rotirea α şi cu deplasarea $\triangle$, rezultă diagramele M_α şi $M_\triangle$ şi reacţiunea $R_{1\triangle}$.

$$R_{1\triangle} - 10i_0\alpha - 22{,}5i_0\alpha + 12i_0\alpha = 0, \quad R_{1\triangle} = 20{,}5i_0.$$

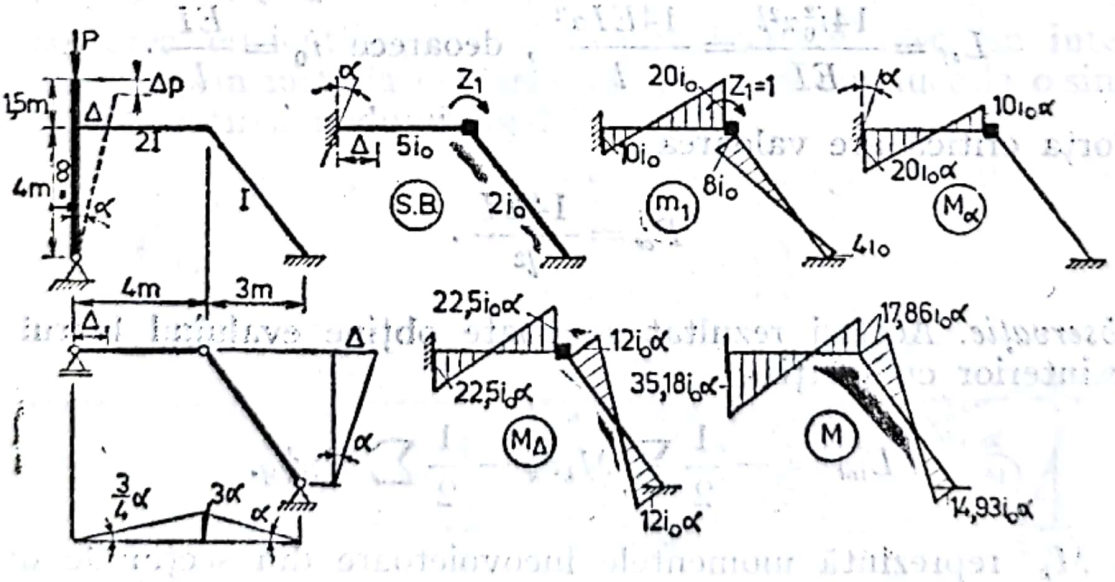


Fig. 17.6

Scanned with OKEN Scanner

Din ecuaţia de condiţie se calculează

$$Z_1 = -\frac{R_{1\Delta}}{r_{11}} = -0{,}732\alpha,$$

valoare cu care s-au determinat momentele încovoietoare

$$M = M_\alpha + M_\Delta + m_1 Z_1.$$

Lucrul mecanic exterior este

$$L_{ext} = P_{cr}\Delta_p = P \cdot 5{,}5 \cdot \frac{\alpha^2}{2} = 2{,}75\alpha^2 P_{cr}.$$

Lucrul mecanic interior este

$$L_{int} = -\frac{1}{2} i_0 \alpha \left[(35{,}18 + 17{,}86)\frac{3}{4}\alpha + (17{,}86 + 14{,}93)\alpha + 35{,}18\alpha \right],$$

$$L_{int} = -53{,}87 i_0 \alpha^2 = -5{,}387 EI\alpha^2.$$

Problema 17.7. Să se determine forţa critică de pierdere a stabilităţii, la sistemul din figura 17.7. Se dă $k_1 = k_2$.

Sistemul are două grade de libertate, notate α_1 şi α_2.

Pentru rezolvare se utilizează teorema valorii staţionare a energiei potenţiale totale, care are următoarea formă

$$\delta V = \delta(-W_{ext} + W) = 0,$$

unde $W_{ext} = -L_{ext}$ reprezintă energia potenţială a forţelor exterioare, $W = -L_{int}$ reprezintă energia de deformaţie acumulată de sistem prin trecerea din poziţia iniţială în poziţia deformată, iar V reprezintă energia potenţială totală.

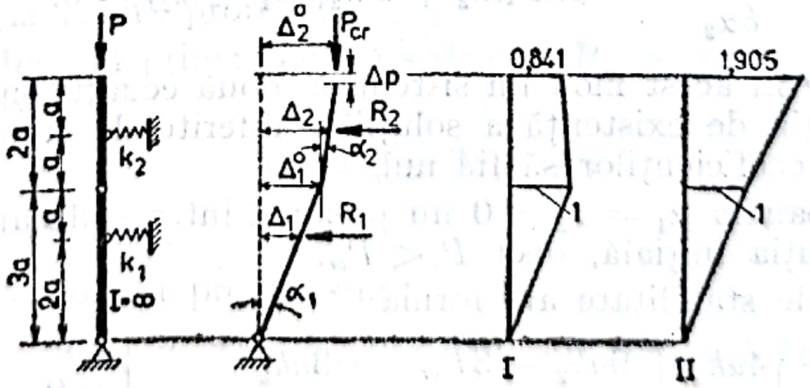


Fig. 17.7

Energia potențială a forței P are expresia

$$W_{ext} = -P_{cr}\triangle_p,$$

$$\triangle_p = 3a(1-\cos\alpha_1) + 2a(1-\cos\alpha_2) = 3a\frac{\alpha_1^2}{2} + 2a\frac{\alpha_2^2}{2},$$

$$W_{ext} = -P_{cr}\frac{a}{2}(3\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2).$$

Energia de deformație, $W = -L_{int}$, este:

$$W = \frac{1}{2}R_1\triangle_1 + \frac{1}{2}R_2\triangle_2,$$

$$\triangle_1 = 2a\alpha_1,\quad \triangle_2 = 3a\alpha_1 + a\alpha_2,$$

$$R_1 = k_1\triangle_1 = 2ak_1\alpha_1,\quad R_2 = k_2\triangle_2 = ak_2(3\alpha_1 + \alpha_2),$$

$$W = \frac{1}{2}[4a^2k_1\alpha_1^2 + a^2k_2(3\alpha_1 + \alpha_2)^2],$$

iar apoi

$$V = -P_{cr}\frac{a}{2}(3\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2) + \frac{1}{2}[4a^2k_1\alpha_1^2 + a^2k_2(3\alpha_1 + \alpha_2)^2]$$

Anulînd variația energiei potențiale totale funcție de cei doi parametri, α_1 și α_2, rezultă:

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha_1} = -3aP_{cr}\alpha_1 + 4a^2k_1\alpha_1 + a^2k_2(9\alpha_1 + 3\alpha_2) = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha_2} = -2aP_{cr}\alpha_2 + a^2k_2(3\alpha_1 + \alpha_2) = 0.$$

Se obține în acest mod un sistem de două ecuații omogene în α_1 și α_2. Condiția de existență a soluțiilor diferite de zero este ca determinantul coeficienților să fie nul.

Soluția banală $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ nu prezintă interes, deoarece sistemul ar fi în poziția inițială, deci $P < P_{cr}$.

Ecuația de stabilitate are forma

$$\begin{vmatrix} 4ak_1 + 9ak_2 - 3P_{cr} & 3ak_2 \\ 3ak_2 & ak_2 - 2P_{cr} \end{vmatrix} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dezvoltînd determinantul se obține o ecuație de gradul doi în P_{cr},

$$6P_{cr}^2 - a(8k_1 + 21k_2)P_{cr} + 4a^2k_1k_2 = 0$$

și soluția

$$P_{cr_{1,2}} = \frac{a(8k_1 + 21k_2) \pm a^2(8k_1 + 21k_2)^2 - 96a^2k_1k_2}{12}.$$

Introducînd condiția $k_1 = k_2 = k$, rezultă:

$$P_{cr_1} = \frac{1{,}705}{12}ak \text{ și } P_{cr_2} = \frac{56{,}295}{12}ak.$$

Fiecăreia dintre aceste două valori îi corespunde o formă proprie de pierdere a stabilității.

— Prima formă proprie:

Se introduce valoarea P_{cr_1} în una dintre ecuații, de exemplu în prima, și se obține

$$12{,}574a^2k\alpha_1 + 3a^2k\alpha_2 = 0$$

sau, simplificînd cu a^2k,

$$12{,}574\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0,$$

de unde

$$\alpha_2 = -0{,}238\alpha_1.$$

Ordonatele formei proprii sînt:

$$\triangle_{11}^0 = 3a\alpha_1, \quad \triangle_{21}^0 = \alpha_1[3a + 2a(-0{,}238)] = 2{,}524a\alpha_1$$

Alegînd $\triangle_{11}^0 = 1$, rezultă $\triangle_{21}^0 = 0{,}841$.

— A doua formă proprie:

Se introduce în prima ecuație valoarea P_{cr_2} și după simplificarea cu a^2k, se obține

$$-1{,}074\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0,$$

de unde $\alpha_2 = 0{,}358\alpha_1$.

Ordonatele formei proprii sînt:

$$\triangle_{12}^0 = 3a\alpha_1 \text{ și } \triangle_{22}^0 = \alpha_1[3a + 2a \cdot 0{,}358] = 5{,}716a\alpha_1.$$

Alegînd $\triangle_{12}^0 = 1$, rezultă $\triangle_{22}^0 = 1{,}905$.

Scanned with OKEN Scanner

Cele două forme proprii au fost reprezentate în figura 17.8 și notate cu I și II.

Verificarea ortogonalității formelor proprii; $L_{12} = L_{21}$:

$$L_{12} = -R_{11}\Delta_{12}^{0} - R_{21}\Delta_{22}^{0},$$

$$L_{21} = -R_{12}\Delta_{11}^{0} - R_{22}\Delta_{21}^{0},$$

unde R_{11} și R_{21} reprezintă reacțiunile ce apar în cele două reazeme în prima formă proprie, iar Δ_{12}^{0} și Δ_{22}^{0} sînt deplasările reazemelor în a doua formă proprie.

Deoarece $R_{11} = k_1\Delta_{11}^{0}$ și $R_{21} = k_2\Delta_{21}^{0}$, se obține

$$L_{12} = -k_1\Delta_{11}^{0}\Delta_{12}^{0} - k_2\Delta_{21}^{0}\Delta_{22}^{0}$$

și similar

$$L_{21} = -k_1\Delta_{12}^{0}\Delta_{11}^{0} - k_2\Delta_{22}^{0}\Delta_{21}^{0},$$

ceea ce confirmă egalitatea $L_{12} = L_{21}$.

Problema 17.8. Să se determine forța critică de pierdere a stabilității, la sistemul din figura 17.8.

Reazemele elastice sînt reprezentate în acest caz de cele două cadre deformabile.

Energia potențială a forței P,

$$W_{ext} = -P_{cr}\Delta_p = P_{cr}\left(2a\,\frac{\alpha_1^2}{2} + 2a\,\frac{\alpha_2^2}{2}\right) = -P_{cr}a(\alpha_1^2 + \alpha_2^2).$$

Energia de deformație a sistemelor elastice,

$$W = -L_{int} = \frac{1}{2}R_1\Delta_1 + \frac{1}{2}R_2\Delta_2,$$

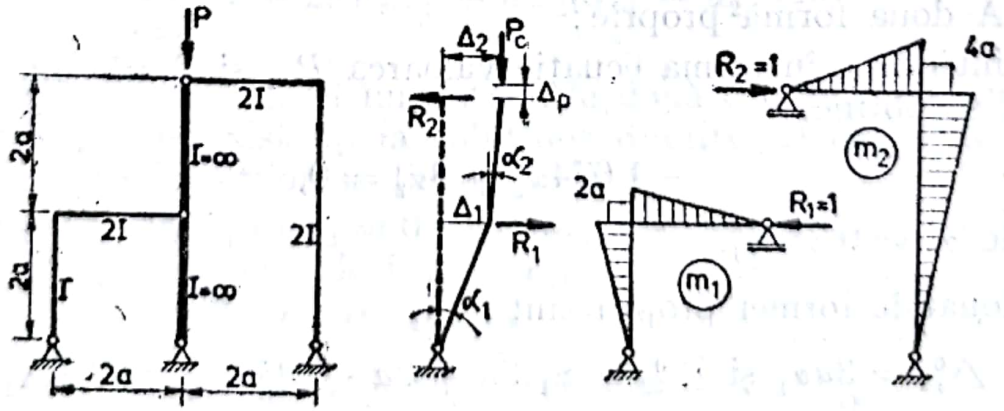


Fig. 17.8

$$\Delta_1 = 2a\alpha_1, \quad \Delta_2 = 2a(\alpha_1 + \alpha_2),$$

$$\Delta_1 = \delta_{11} R_1, \quad R_1 = \frac{\Delta_1}{\delta_{11}},$$

$$\Delta_2 = \delta_{22} R_2, \quad R_2 = \frac{\Delta_2}{\delta_{22}},$$

$$W = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_1^2}{\delta_{11}} + \frac{\Delta_2^2}{\delta_{22}}\right).$$

Calculul deplasărilor δ_{11} și δ_{22}:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot$$

$$\cdot 2a = \frac{4a^3}{EI},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot 4a \cdot \frac{2}{3} \cdot 4a + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot$$

$$\cdot 4a = \frac{16a^3}{EI}.$$

Cu aceste valori, energia de deformație devine

$$W = \frac{EI}{8a}(5\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2).$$

Energia potențială totală este

$$V = -P_{cr}a(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \frac{EI}{8a}(5\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2).$$

Variația energiei potențiale totale în raport cu α_1 și α_2, este:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = -2P_{cr}a\alpha_1 + \frac{EI}{8a}(10\alpha_1 + \alpha_2) = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = -2P_{cr}a\alpha_2 + \frac{EI}{8a}(\alpha_1 + 2\alpha_2) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația de stabilitate are forma

$$\begin{vmatrix} \frac{5EI}{4a} - 2P_{cr}a & \frac{EI}{8a} \\ \frac{EI}{8a} & \frac{EI}{4a} - 2P_{cr}a \end{vmatrix} = 0$$

Prin dezvoltarea determinantului se obține

$$256a^4P_{cr}^2 - 192a^2BP_{cr} + 19B^2 = 0,$$

unde s-a notat $B = EI$. Din rezolvarea ecuației de gradul 2, rezultă valorile forțelor critice:

$$P_{cr_1} = \frac{0{,}117\,EI}{a^2} \text{ și } P_{cr_2} = \frac{0{,}633\,EI}{a^2}.$$

Formele proprii corespunzătoare celor două valori ale forțelor critice sînt:

— Prima formă proprie:

$$\alpha_2 = -8{,}128\alpha_1,$$

$$\triangle_{11} = 2a\alpha_1,\ \triangle_{21} = 2a(\alpha_1 - 8{,}128\alpha_1) = -14{,}256a\alpha_1,$$

$$\triangle_{11} = 1,\ \triangle_{21} = -7{,}128.$$

— A doua formă proprie:

$$\alpha_2 = 0{,}128\alpha_1,$$

$$\triangle_{12} = 2a\alpha_1,\ \triangle_{22} = 2a(\alpha_1 + 0{,}128\alpha_1) = 2{,}256a\alpha_1,$$

$$\triangle_{12} = 1,\ \triangle_{22} = 1{,}128\alpha_1.$$

Problema 17.9. Să se determine forța critică de pierdere a stabilității, la sistemul din figura 17.9.

Structurile elastice fiind legate rigid de bara infinit rigidă, vor fi rezolvate prin metoda deplasărilor, pentru cedările de reazem α_1 și $\triangle_1$, respectiv α_2 și $\triangle_2$.

Energia potențială a forței P_{cr},

$$W_{ext} = -P_{cr}\triangle_p = -P_{cr}\left(3a\,\frac{\alpha_1^2}{2} + 2a\,\frac{\alpha_2^2}{2}\right) = -P_{cr}a(1{,}5\alpha_1^2 + \alpha_2^2).$$

Scanned with OKEN Scanner

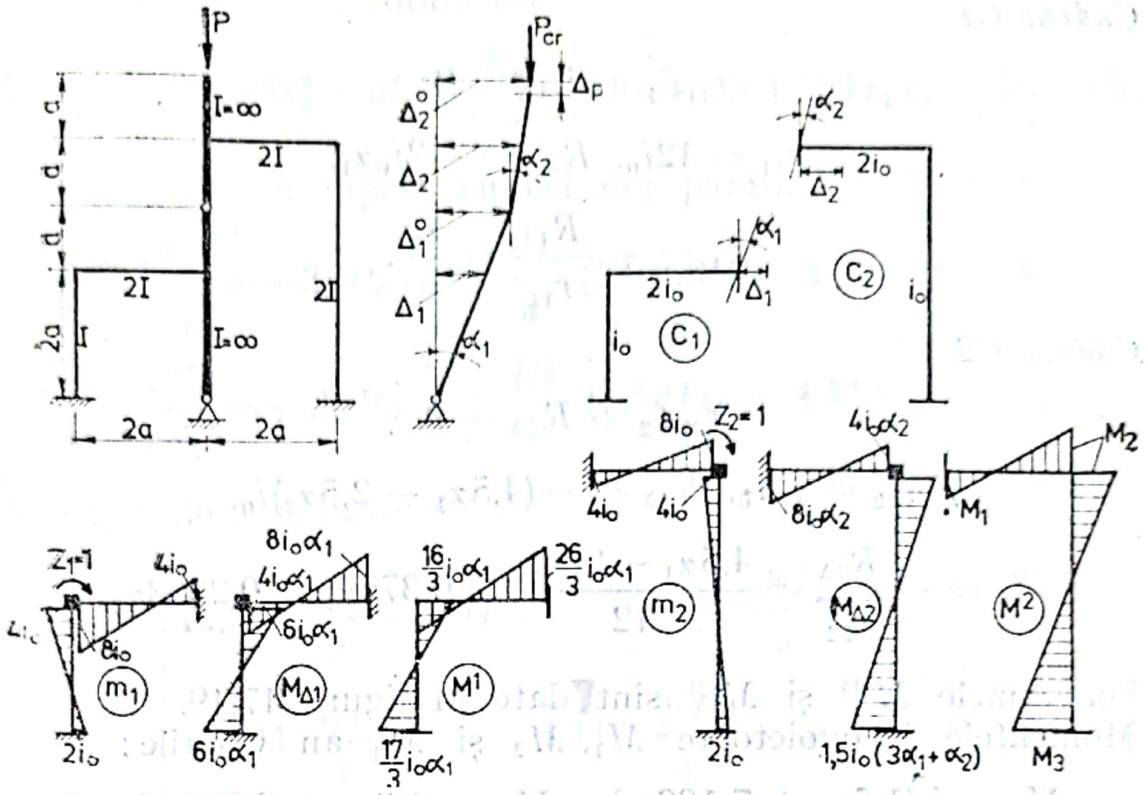


Fig. 17.9

Energia de deformație acumulată de cele două sisteme elastice este

$$W = \frac{1}{2}\int \frac{M_1^2}{EI}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{M_2^2}{EI}\,dx.$$

Pentru calculul diagramelor de momente încovoietoare $M^{(1)}$ și $M^{(2)}$, se alege $i_0 = \dfrac{EI}{2a}$.

Momentele încovoietoare din diagrama $M_{\Delta1}$, pe sistemul de bază, sînt :

— din rotirea α_1 : $4 \cdot 2i_0\alpha_1$ și $2 \cdot 2i_0\alpha_1$, pe riglă,

— din translația Δ_1 : $6i_0\alpha_1$, pe stîlp, unde s-a introdus $\Delta_1 = 2a\alpha_1$.

Momentele încovoietoare din diagrama $M_{\Delta2}$, pe sistemul de bază, sînt :

— din rotirea α_2 : $4 \cdot 2i_0\alpha_2$ și $2 \cdot 2i_0\alpha_2$, pe riglă,

— din translația Δ_2 : $1{,}5i_0(3\alpha_1 + \alpha_2)$, pe stîlp, unde s-a introdus $\Delta_2 = 3a\alpha_1 + a\alpha_2$.

Scanned with OKEN Scanner

Cadrul C1

$$r_{11}Z_1 + R_{1\Delta} = 0,$$

$$r_{11} = 12i_0, \quad R_{1\Delta} = -2i_0\alpha_1,$$

$$Z_1 = -\frac{R_{1\Delta}}{r_{11}} = \frac{\alpha_1}{6}.$$

Cadrul C2

$$r_{22}Z_2 + R_{2\Delta} = 0$$

$$r_{22} = 12i_0, \quad R_{2\Delta} = -(4{,}5\alpha_1 - 2{,}5\alpha_2)i_0,$$

$$Z_2 = -\frac{R_{2\Delta}}{r_{22}} = \frac{4{,}5\alpha_1 - 2{,}5\alpha_2}{12} = 0{,}375\alpha_1 - 0{,}2083\alpha_2.$$

Diagramele $M^{(1)}$ și $M^{(2)}$ sînt date în figura 17.19.
Momentele încovoietoare M_1, M_2 și M_3 au valorile:

$$M_1 = i_0(1{,}5\alpha_1 + 7{,}166\alpha_2), \quad M_2 = i_0(3\alpha_1 + 2{,}333\alpha_2) \quad \text{și}$$

$$M_3 = i_0(3{,}75\alpha_1 + 1{,}917\alpha_2).$$

Cu aceste date se calculează

$$L_{int}^{(1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{26}{3}\, i_0\alpha_1\,\alpha_1 + \left(\frac{16}{3}\, i_0\alpha_1 + \frac{17}{3}\, i_0\alpha_1\right)\alpha_1\right] = 9{,}83 i_0\,\alpha_1^2 =$$

$$= 4{,}917\,\frac{EI}{a}\,\alpha_1^2,$$

$$L_{int}^{(2)} = \frac{1}{2}\left[M_1\alpha_2 + (M_2 + M_3)\,\frac{\Delta_2}{4a}\right] = \frac{i_0}{2}\,[1{,}5\alpha_1\alpha_2 + 7{,}166\,\alpha_2^2 +$$

$$+ (6{,}75\alpha_1 + 4{,}251\alpha_2)(0{,}75\alpha_1 + 0{,}25\alpha_2)] = i_0(2{,}531\alpha_1^2 + 3{,}188\alpha_1\alpha_2 +$$

$$+ 4{,}114\alpha_2^2) = \frac{EI}{a}\,(1{,}266\alpha_1^2 + 1{,}594\alpha_1\alpha_2 + 2{,}057\,\alpha_2^2).$$

Energia de deformație primește forma

$$W = -L_{int}^{(1)} - L_{int}^{(2)} = \frac{EI}{a}\,(6{,}183\alpha_1^2 + 1{,}594\alpha_1\alpha_2 + 2{,}057\,\alpha_2^2).$$

Scanned with OKEN Scanner

Energia potențială totală este

$$V = -P_{cr}a(1{,}5\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + \frac{EI}{a}(6{,}183\alpha_1^2 + 1{,}594\alpha_1\alpha_2 + 2{,}057\alpha_2^2),$$

iar variația sa, în raport cu cei doi parametri, devine:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = -3aP_{cr}\alpha_1 + \frac{EI}{a}(12{,}366\alpha_1 + 1{,}594\alpha_2) = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = -2aP_{cr}\alpha_2 + \frac{EI}{a}(1{,}594\alpha_1 + 4{,}114\alpha_2) = 0.$$

Ecuația de stabilitate este

$$\begin{vmatrix} 12{,}366\,\frac{EI}{a} - 3aP_{cr} & 1{,}594\,\frac{EI}{a} \\ 1{,}594\,\frac{EI}{a} & 4{,}114\,\frac{EI}{a} - 2aP_{cr} \end{vmatrix} = 0$$

Prin dezvoltarea determinantului se obține

$$6a^2P_{cr}^2 - 37{,}07aBP_{cr} + 49{,}28B^2 = 0,$$

cu soluția

$$P_{cr_1} = \frac{1{,}936\,EI}{a^2} \text{ și } P_{cr_2} = \frac{4{,}242\,EI}{a^2}.$$

Formele proprii, corespunzătoare celor două valori ale forțelor critice, se determină în același mod ca și în cazurile precedente.

— Prima formă proprie:

$$\alpha_2 = -4{,}114\alpha_1,$$

$$\Delta_{11}^0 = 3a\alpha_1,\ \Delta_{21}^0 = 3a\alpha_1 + 2a\alpha_2 = -5{,}228a\alpha_1,$$

$$\Delta_{11}^0 = 1,\ \Delta_{21}^0 = -1{,}743.$$

— A doua formă proprie:

$$\alpha_2 = 0{,}226\alpha_1,$$

$$\Delta_{12}^0 = 3a\alpha_1,\ \Delta_{22}^0 = 3a\alpha_1 + 2a\alpha_2 = 3{,}452a\alpha_1,$$

$$\Delta_{12}^0 = 1,\ \Delta_{22}^0 = 1{,}151.$$

Scanned with OKEN Scanner

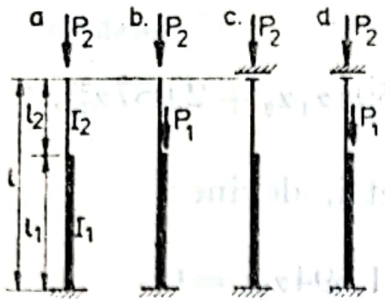


Fig. XVII.3

B. STABILITATEA SISTEMELOR CU NUMĂR INFINIT DE GRADE DE LIBERTATE

1. STABILITATEA BARELOR CU SECȚIUNE VARIABILĂ ÎN TREPTE

Tipurile de bare utilizate frecvent în practică sînt barele cu o singură treaptă de variație, avînd capătul superior liber sau cu posibilități de translație. Barele sînt încărcate, sau numai la capătul superior sau și la capătul superior și la nivelul de variație bruscă a secțiunii (fig. XVII.3).

Ecuația de stabilitate pentru fiecare dintre cele patru cazuri este:

a) $$\operatorname{tg} v_1 \operatorname{tg} v_2 = \sqrt{\frac{1}{\beta}}, \qquad \text{(XVII. 1, a)}$$

b) $$\operatorname{tg} v_1 \operatorname{tg} v_2 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta}}, \qquad \text{(XVII. 1. b)}$$

c) $$\operatorname{tg} v_1 \operatorname{cotg} v_2 = -\sqrt{\frac{1}{\beta}}, \qquad \text{(XVII, 1, c)}$$

d) $$\operatorname{tg} v_1 \operatorname{cotg} v_2 = -\sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta}}, \qquad \text{(XVII. 1, d)}$$

unde $\beta = \dfrac{I_2}{I_1}$, $\alpha_1 = \dfrac{P_1 + P_2}{P_2}$.

Parametrii de încărcare axială sînt:

$$v_2 = l_2 \sqrt{\frac{P_2}{EI_2}}, \quad v_1 = l_1 \sqrt{\frac{P_2}{EI_1}} = \frac{\sqrt{\beta}}{\gamma} v_2,$$

(pentru cazurile a și c), cu $\gamma = \dfrac{l_2}{l_1}$,

$$v_2 = l_2 \sqrt{\frac{P_2}{EI_2}}, \quad v_1 = l_1 \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{EI_1}} = \sqrt{\frac{\alpha_1 \beta}{\gamma}} v_2,$$

(pentru cazurile b și d).

Scanned with OKEN Scanner

Soluția minimă se obține pentru primele două cazuri, în condiția $v_1 < \frac{\pi}{2}$, $v_2 < \frac{\pi}{2}$, iar pentru ultimele două cazuri există două situații:

— dacă raportul $\frac{\sqrt{\alpha_1\beta}}{\gamma} > 1$, rezultă $v_1 > v_2$ și $v_2 < \frac{\pi}{2} < v_1$,

— dacă raportul $\frac{\sqrt{\alpha_1\beta}}{\gamma} < 1$, rezultă $v_1 < v_2$ și $v_1 < \frac{\pi}{2} < v_2$.

Raportul $\alpha_1 = 1$ reprezintă cazul c.

Valorile funcțiilor trigonometrice tg v și cotg v, pentru parametrul v exprimat în radiani, se găsesc date în anexa 6.

O utilizare mai puțin frecventă în practică o au barele cu două sau mai multe trepte de variație a secțiunii transversale, dar studierea lor este deosebit de importantă.

Pentru barele cu două trepte de variație a secțiunii transversale (fig. XVII.4) se studiază aceleași două tipuri de legături la capătul superior — capăt superior liber și capăt superior cu încastrare glisantă (rotire împiedicată).

Ecuațiile de stabilitate pentru cazurile analizate sînt:

— Capătul superior liber,

a) $$\sqrt{\beta_2\alpha_4}\,\mathrm{tg}\,v_1\,\mathrm{tg}\,v_3 + \sqrt{\beta_3\alpha_5}\,\mathrm{tg}\,v_2\,\mathrm{tg}\,v_3 + \sqrt{\beta_1\alpha_6}\,\mathrm{tg}\,v_1\,\mathrm{tg}\,v_2 - 1 = 0, \qquad \text{(XVII.2, a)}$$

unde:

$$v_3 = l_3\sqrt{\frac{P_3}{EI_3}},\quad v_2 = l_2\sqrt{\frac{P_2+P_3}{EI_2}} = \frac{v_3}{\gamma_3}\sqrt{\frac{\beta_3}{\alpha_5}},$$

$$v_1 = l_1\sqrt{\frac{P_1+P_2+P_3}{EI_1}} = \frac{v_3}{\gamma_2}\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha_4}}.$$

b) $$\sqrt{\beta_2\alpha_5}\,\mathrm{tg}\,v_1\,\mathrm{tg}\,v_3 + \sqrt{\beta_3\alpha_5}\,\mathrm{tg}\,v_2\,\mathrm{tg}\,v_3 + \sqrt{\beta_1}\mathrm{tg}\,v_1\,\mathrm{tg}\,v_2 - 1 = 0 \qquad \text{(XVII. 2, } b\text{)}$$

unde:

v_3 și v_2 sînt cele de la cazul a), iar

$$v_1 = l_1\sqrt{\frac{P_2+P_3}{EI_1}} = \frac{v_3}{\gamma_2}\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha_5}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

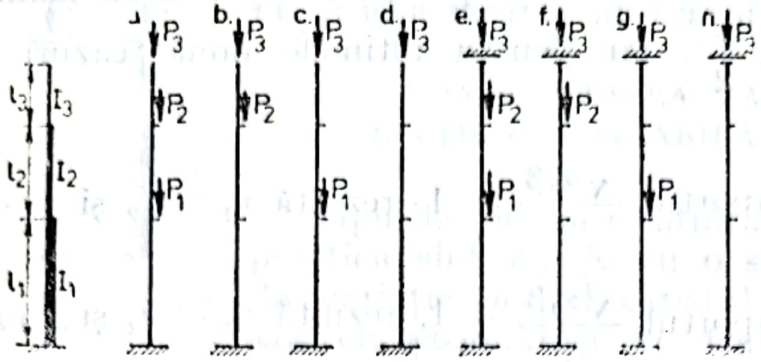


Fig. XVII.4

c) $\sqrt{\beta_2\alpha_{10}}\,\mathrm{tg}\,v_1\,\mathrm{tg}\,v_3+\sqrt{\beta_3}\,\mathrm{tg}\,v_2\,\mathrm{tg}\,v_3+\sqrt{\beta_1\alpha_{10}}\,\mathrm{tg}\,v_1\,\mathrm{tg}\,v_2-1=0,$

(XVII 2, c)

unde :

$$v_2=l_2\sqrt{\frac{P_3}{EI_2}}=\frac{v_3\sqrt{\beta_3}}{\gamma_3},\quad v_1=l_1\sqrt{\frac{P_1+P_3}{EI_1}}=\frac{v_3}{\gamma_2}\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha_{10}}},$$

d) $\sqrt{\beta_2}\,\mathrm{tg}\,v_1\,\mathrm{tg}\,v_3+\sqrt{\beta_3}\,\mathrm{tg}\,v_2\,\mathrm{tg}\,v_3+\sqrt{\beta_1}\,\mathrm{tg}\,v_1\,\mathrm{tg}\,v_2-1=0,$

(XVII. 2, d)

unde

$$v_1=l_1\sqrt{\frac{P_3}{EI_1}}=\frac{v_3\sqrt{\beta_2}}{\gamma_2}.$$

— Capătul superior cu încastrare glisantă (parametrii de încărcare axială v_1, v_2 și v_3 au aceleași expresii ca în cazul barei cu capăt liber.

e) $\sqrt{\beta_2\alpha_4}\,\mathrm{tg}\,v_1\,\mathrm{cotg}\,v_3+\sqrt{\beta_3\alpha_5}\,\mathrm{tg}\,v_2\,\mathrm{cotg}\,v_3-\sqrt{\beta_1\alpha_6}\,\mathrm{tg}\,v_1\,\mathrm{tg}\,v_2+1=0,$

(XVII. 2, e)

f) $\sqrt{\beta_2\alpha_5}\,\mathrm{tg}\,v_1\,\mathrm{cotg}\,v_3+\sqrt{\beta_3\alpha_5}\,\mathrm{tg}\,v_2\,\mathrm{cotg}\,v_3-\sqrt{\beta_1}\,\mathrm{tg}\,v_1\,\mathrm{tg}\,v_2+1=0,$

(XVII. 2, *f*)

g) $\sqrt{\beta_2\alpha_{10}}\,\mathrm{tg}\,v_1\,\mathrm{cotg}\,v_3+\sqrt{\beta_3}\,\mathrm{tg}\,v_2\,\mathrm{cotg}\,v_3-\sqrt{\beta_1\alpha_{10}}\,\mathrm{tg}\,v_1\,\mathrm{tg}\,v_2+1=0,$

(XVII.2, *g*)

h) $\sqrt{\beta_2}\,\mathrm{tg}\,v_1\,\mathrm{cotg}\,v_3+\sqrt{\beta_3}\,\mathrm{tg}\,v_2\,\mathrm{cotg}\,v_3-\sqrt{\beta_1}\,\mathrm{tg}\,v_1\,\mathrm{tg}\,v_2+1=0.$

(XVII. 2, *h*)

Scanned with OKEN Scanner

Notaţiile utilizate în ecuaţiile (XVII.2) sînt :

$$\gamma_1 = \frac{l_2}{l_1}, \quad \gamma_2 = \frac{l_3}{l_1}, \quad \gamma_3 = \frac{l_3}{l_2}, \quad \beta_1 = \frac{I_2}{I_1}, \quad \beta_2 = \frac{I_3}{I_1}, \quad \beta_3 = \frac{I_3}{I_2}, \tag{XVII.3}$$

$$\alpha_4 = \frac{P_3}{P_1 + P_2 + P_3}, \quad \alpha_5 = \frac{P_3}{P_2 + P_3}, \quad \alpha_6 = \frac{P_2 + P_3}{P_1 + P_2 + P_2},$$

$$\alpha_{10} = \frac{P_3}{P_1 + P_3}.$$

APLICAŢII

Problema 17.10. Să se determine parametrii critici de încărcare axială şi lungimile de flambaj pentru bara cu secţiunea transversală variabilă într-o singură treaptă, din figura 17.10. Se studiază două cazuri : a) bara încărcată numai la capătul superior, b) bara încărcată atît la capătul superior cît şi la nivelul de variaţie a secţiunii transversale. Se consideră : $P_1 = 3P$, $P_2 = P$, respectiv $\alpha_1 = \frac{P_1 + P_2}{P_2} = 4$.

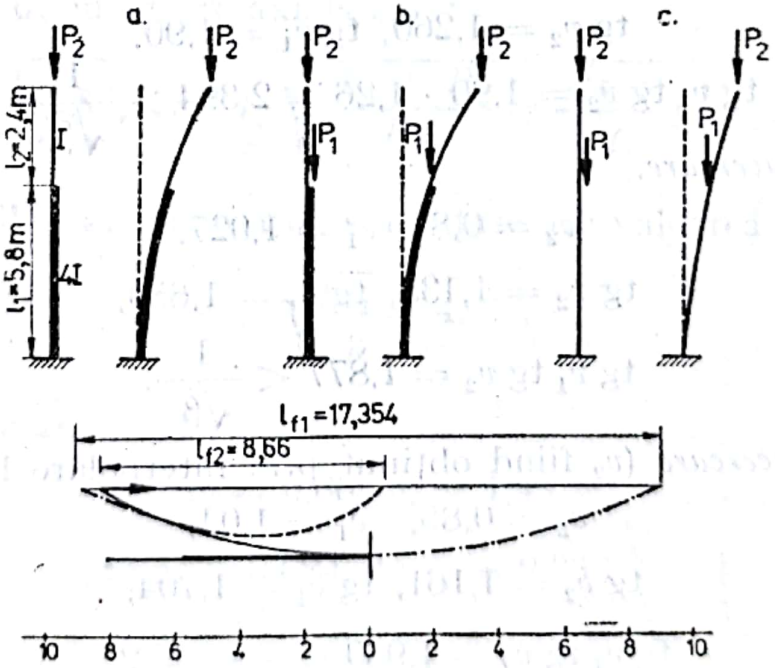


Fig. 17.10

Cu elementele geometrice date, rezultă:

$$\gamma = \frac{l_2}{l_1} = \frac{2{,}40}{5{,}80} = 0{,}414, \quad \beta = \frac{I_2}{I_1} = 0{,}25.$$

Cazul a.

Ecuația de stabilitate este $\operatorname{tg} v_1 \operatorname{tg} v_2 = \sqrt{\frac{1}{\beta}}$.

Parametrii de încărcare axială pentru cele două tronsoane ale stîlpului sînt:

$$v_2 = l_2 \sqrt{\frac{P_2}{EI_2}},$$

$$v_1 = l_1 \sqrt{\frac{P_2}{EI_1}} = \frac{\sqrt{\beta}}{\gamma} v_2 = 1{,}208 v_2,$$

$$\sqrt{\frac{1}{\beta}} = \frac{1}{0{,}5} = 2.$$

Ecuația de stabilitate se rezolvă prin încercări, valoarea minimă fiind obținută pentru $v_1 < \frac{\pi}{2}$ și $v_2 < \frac{\pi}{2}$.

Prima încercare.

$$v_2 = 0{,}90, \quad v_1 = 1{,}208\, v_2 = 1{,}088,$$

$$\operatorname{tg} v_2 = 1{,}260, \quad \operatorname{tg} v_1 = 1{,}90,$$

$$\operatorname{tg} v_1 \operatorname{tg} v_2 = 1{,}90 \cdot 1{,}26 = 2{,}394 > \frac{1}{\sqrt{\beta}}.$$

A doua încercare.

$$v_2 = 0{,}85, \quad v_1 = 1{,}027,$$

$$\operatorname{tg} v_2 = 1{,}138, \quad \operatorname{tg} v_1 = 1{,}650,$$

$$\operatorname{tg} v_1 \operatorname{tg} v_2 = 1{,}877 < \frac{1}{\sqrt{\beta}}.$$

A treia încercare (v_2 fiind obținut prin interpolare liniară)

$$v_2 = 0{,}86, \quad v_1 = 1{,}04,$$

$$\operatorname{tg} v_2 = 1{,}161, \quad \operatorname{tg} v_1 = 1{,}704,$$

$$\operatorname{tg} v_1 \operatorname{tg} v_2 = 1{,}980 < \frac{1}{\sqrt{\beta}} = 2.$$

Scanned with OKEN Scanner

După încercarea a treia s-a obținut o valoare foarte apropiată de valoarea $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$, deci se reţin aceste ultime valori ale parametrilor de încărcare axială, ca valori critice:

$$v_{cr_1} = 1{,}06, \qquad v_{cr_2} = 0{,}86.$$

Lungimile de flambaj ale celor două tronsoane ale stîlpului sînt:

$$l_{f_1} = \frac{\pi}{v_{cr_1}} l_1 = 3{,}02 \cdot 5{,}80 = 17{,}52 \text{ m},$$

$$l_{f_2} = \frac{\pi}{v_{cr_2}} l_2 = 3{,}65 \cdot 2{,}40 = 8{,}77 \text{ m}.$$

Forma deformată a barei şi lungimile de flambaj sînt reprezentate în figura 17.10. Existenţa celor două curbe, tangente în punctul de variaţie a secţiunii, se datoreşte rigidităţii diferite a celor două tronsoane.

Cazul b.

Ecuaţia de stabilitate are forma $\operatorname{tg} v_1 \operatorname{tg} v_2 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta}}$.

Parametrii de încărcare axială sînt:

$$v_2 = l_2 \sqrt{\frac{P_2}{EI_2}}, \quad v_1 = l_1 \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{EI_1}} = \frac{\sqrt{\alpha_1 \beta}}{\gamma} v_2 = 2{,}415 v_2.$$

Termenul liber al ecuaţiei de stabilitate are valoarea

$$\sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta}} = 4.$$

Prima încercare

$$v_2 = 0{,}60, \quad v_1 = 1{,}45,$$

$$\operatorname{tg} v_2 = 0{,}684, \quad \operatorname{tg} v_1 = 8{,}238,$$

$$\operatorname{tg} v_1 \operatorname{tg} v_2 = 5{,}634 > \sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta}}.$$

Inv. 75658

Scanned with OKEN Scanner

A doua încercare

$$v_2 = 0{,}58, \quad v_1 = 1{,}40,$$

$$\operatorname{tg} v_2 = 0{,}655, \quad \operatorname{tg} v_1 = 5{,}798,$$

$$\operatorname{tg} v_1 \operatorname{tg} v_2 = 3{,}797 < \sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta}}.$$

Prin interpolare linară rezultă:

$$v_{cr_2} = 0{,}582 \text{ și } v_{cr_1} = 1{,}406.$$

Lungimile de flambaj sînt:

$$l_{f_1} = \frac{\pi}{v_{cr_1}} l_1 = 2{,}234 \cdot 5{,}80 = 12{,}857 \text{ m},$$

$$l_{f_2} = \frac{\pi}{v_{cr_2}} l_2 = 5{,}398 \cdot 2{,}40 = 12{,}955 \text{ m}.$$

Cazul b poate fi utilizat pentru studiul pierderii stabilității barei cu secțiune constantă, încărcată cu aceleași două forțe axiale. Condiția trecerii la bara cu secțiune constantă, de moment de inerție I_1, este $\beta = 1$.

Ecuația de stabilitate devine

$$\operatorname{tg} v_1 \operatorname{tg} v_2 = 2,$$

iar parametrii de încărcare axială sînt:

$$v_2 = l_2 \sqrt{\frac{P_2}{EI_1}}, \quad v_1 = l_1 \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{EI_1}} = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\gamma}} v_2 = 4{,}831\, v_2.$$

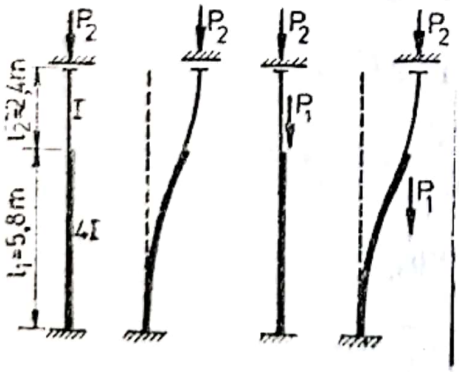


Fig. 17.11

Rezolvînd ecuația rezultă:

$$v_{cr_1} = 1{,}50, \qquad v_{cr_2} = 0{,}31.$$

Problema 17.11. Să se determine parametrii critici de încărcare axială și lungimile de flambaj pentru bara cu secțiune variabilă într-o singură treaptă, din figura 17.11, în aceleași cazuri de încărcare, analizate la aplicația precedentă. Se consideră $\alpha_1 = 4$.

Scanned with OKEN Scanner

Coeficienții γ și β au valorile : $\gamma = 0{,}414$ și $\beta = 0{,}25$.

Cazul a.

Ecuația de stabilitate este $\operatorname{tg} v_1 \operatorname{cotg} v_2 = -\frac{1}{\sqrt{\beta}} = -2$.

Parametrii de încărcare axială sînt :

$$v_2 = l_2 \sqrt{\frac{P_2}{EI_2}}, \quad v_1 = l_1 \sqrt{\frac{P_2}{EI_1}} = \frac{\sqrt{\beta}}{\gamma} v_2 = 1{,}208\, v_2.$$

Ecuația de stabilitate se rezolvă prin încercări observînd că $v_2 < \frac{\pi}{2}$, iar $v_1 > \frac{\pi}{2}$.

Prima încercare.

$$v_2 = 1{,}40, \quad v_1 = 1{,}69,$$

$$\operatorname{cotg} v_2 = 0{,}172, \quad \operatorname{tg} v_1 = -8{,}35,$$

$$\operatorname{tg} v_1 \operatorname{cotg} v_2 = -8{,}35 \cdot 0{,}172 = -1{,}436 > -\sqrt{\frac{1}{\beta}}.$$

A doua încercare.

$$v_2 = 1{,}37, \quad v_1 = 1{,}65,$$

$$\operatorname{cotg} v_2 = 0{,}203, \quad \operatorname{tg} v_1 = -12{,}60,$$

$$\operatorname{tg} v_1 \operatorname{cotg} v_2 = -12{,}6 \cdot 0{,}203 = -2{,}55 < -\sqrt{\frac{1}{\beta}}.$$

Prin interpolare liniară rezultă :

$$v_{cr_2} = 1{,}385 \text{ și } v_{cr_1} = 1{,}673.$$

Lungimile de flambaj sînt :

$$l_{f_1} = \frac{\pi}{v_{cr_1}} l_1 = 1{,}878 \cdot 5{,}80 = 10{,}89 \text{ m},$$

$$l_{f_2} = \frac{\pi}{v_{cr_2}} l_2 = 2{,}268 \cdot 2{,}40 = 5{,}46 \text{ m}.$$

Cazul b.

Ecuația de stabilitate este $\operatorname{tg} v_1 \operatorname{cotg} v_2 = -\sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta}} = -4$.

Scanned with OKEN Scanner

Parametrii de încărcare axială sînt:

$$v_2 = l_2\sqrt{\frac{P_2}{EI_2}},\quad v_1 = l_1\sqrt{\frac{P_1+P_2}{EI_1}} = \frac{\sqrt{\alpha_1\beta}}{\gamma}v_2 = 2{,}415v_2.$$

Prima încercare

$$v_2 = 0{,}75,\quad v_1 = 1{,}81,$$

$$\operatorname{cotg} v_2 = 1{,}073,\quad \operatorname{tg} v_1 = -4{,}100,$$

$$\operatorname{tg} v_1 \operatorname{cotg} v_2 = -4{,}4 < -\sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta}}.$$

A doua încercare

$$v_2 = 0{,}77,\quad v_1 = 1{,}86,$$

$$\operatorname{cotg} v_2 = 1{,}031,\quad \operatorname{tg} v_1 = -3{,}36,$$

$$\operatorname{tg} v_1 \operatorname{cotg} v_2 = -3{,}36\cdot 1{,}031 = -3{,}464 > -\sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta}}.$$

Prin interpolare liniară se determină:

$$v_{cr_2} = 0{,}758 \text{ și } v_{cr_1} = 1{,}832.$$

Lungimile de flambaj au valorile:

$$l_{f_1} = \frac{\pi}{v_{cr_1}} l_1 = 1{,}715\cdot 5{,}80 = 9{,}947 \text{ m},$$

$$l_{f_2} = \frac{\pi}{v_{cr_2}} l_2 = 4{,}144\cdot 2{,}40 = 9{,}945 \text{ m}.$$

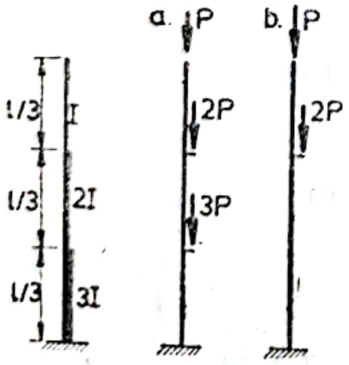


Fig. 17.12.

Problema 17.12. Să se determine parametrii critici de încărcare axială și lungimile de flambaj, pentru bara cu secțiunea variabilă în două trepte, în cele două situații de încărcare indicate în figura 17.12.

Elementele caracteristice sînt:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1,$$

$$\beta_1 = \frac{2}{3},\quad \beta_2 = \frac{1}{3},\quad \beta_3 = \frac{1}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cazul a

Parametrii de încărcare axială au expresiile:

$$v_3 = l_3 \sqrt{\frac{P_3}{EI_3}} = \frac{l}{3} \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

$$v_2 = l_2 \sqrt{\frac{P_2 + P_3}{EI_2}} = \frac{l}{3} \sqrt{\frac{3P}{2EI}} = v_3 \sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}225\, v_3,$$

$$v_1 = l_1 \sqrt{\frac{P_1 + P_2 + P_3}{EI_1}} = \frac{l}{3} \sqrt{\frac{6P}{3EI}} = v_3 \sqrt{2} = 1{,}414\, v_3.$$

Ecuația de stabilitate este (XVII.2, a)

$$\sqrt{\beta_2 \alpha_4}\, \mathrm{tg}\, v_1\, \mathrm{tg}\, v_3 + \sqrt{\beta_3 \alpha_5}\, \mathrm{tg}\, v_2\, \mathrm{tg}\, v_3 + \sqrt{\beta_1 \alpha_6}\, \mathrm{tg}\, v_1\, \mathrm{tg}\, v_2 - 1 = 0.$$

Se calculează:

$$\alpha_4 = \frac{P_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{1}{6}, \quad \alpha_5 = \frac{P_3}{P_2 + P_3} = \frac{1}{3},$$

$$\alpha_6 = \frac{P_2 + P_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{1}{2}$$

și după aceea:

$$\sqrt{\beta_2 \alpha_4} = \sqrt{\frac{1}{18}} = 0{,}236, \quad \sqrt{\beta_3 \alpha_5} = \sqrt{\frac{1}{6}} = 0{,}408,$$

$$\sqrt{\beta_1 \alpha_6} = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}577.$$

Cu aceste elemente ecuația de stabilitate devine

$$E = 0{,}236\, \mathrm{tg}\, v_1\, \mathrm{tg}\, v_3 + 0{,}408\, \mathrm{tg}\, v_2\, \mathrm{tg}\, v_3 + 0{,}577\, \mathrm{tg}\, v_1\, \mathrm{tg}\, v_2 - 1 = 0.$$

Încercarea 1

$$v_3 = 0{,}5, \quad v_2 = 1{,}225\, v_3 = 0{,}6125, \quad v_1 = 1{,}414\, v_3 = 0{,}707.$$

$$\mathrm{tg}\, v_3 = 0{,}5463, \quad \mathrm{tg}\, v_2 = 0{,}7026, \quad \mathrm{tg}\, v_1 = 0{,}854,$$

$$E = -0{,}387.$$

Scanned with OKEN Scanner

Încercarea 2.

$$v_3 = 0{,}6, \quad v_2 = 0{,}735, \quad v_3 = 0{,}848,$$

$$\operatorname{tg} v_3 = 0{,}684, \quad \operatorname{tg} v_2 = 0{,}904, \quad \operatorname{tg} v_3 = 1{,}135,$$

$$E = 0{,}027.$$

Încercarea 3.

$$v_3 = 0{,}59, \quad v_2 = 0{,}723, \quad v_1 = 0{,}834,$$

$$\operatorname{tg} v_3 = 0{,}669, \quad \operatorname{tg} v_2 = 0{,}882, \quad \operatorname{tg} v_1 = 1{,}103,$$

$$E = -0{,}024.$$

Se aleg valorile critice:

$$v_{cr_3} = 0{,}595, \quad v_{cr_2} = 0{,}729, \quad v_{cr_1} = 0{,}841.$$

Lungimile de flambaj ale celor trei tronsoane sînt:

$$l_{f_1} = \frac{\pi}{v_{cr_1}} l_1 = 3{,}7355 \; l_1 = 1{,}245 \; l,$$

$$l_{f_2} = \frac{\pi}{v_{cr_2}} l_2 = 4{,}309 \; l_2 = 1{,}436 \; l,$$

$$l_{f_3} = \frac{\pi}{v_{cr_3}} l_3 = 5{,}280 \; l_3 = 1{,}760 \; l.$$

Cazul b.

Parametrii de încărcare axială sînt:

$$v_3 = \frac{l}{3}\sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad v_2 = \frac{l}{3}\sqrt{\frac{3P}{EI_2}} = v_3\sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}225 v_3,$$

$$v_1 = \frac{l}{3}\sqrt{\frac{3P}{EI_1}} = v_3.$$

Ecuația de stabilitate are forma (XVI.2, b)

$$\sqrt{\beta_2\alpha_5}\operatorname{tg} v_1 \operatorname{tg} v_3 + \sqrt{\beta_3\alpha_5}\operatorname{tg} v_2 \operatorname{tg} v_3 + \sqrt{\beta_1}\operatorname{tg} v_1 \operatorname{tg} v_2 - 1 = 0.$$

Utilizînd datele problemei, rezultă:

$$\sqrt{\beta_2\alpha_5} = \sqrt{\frac{1}{9}} = 0{,}334, \quad \sqrt{\beta_3\alpha_5} = \sqrt{\frac{1}{6}} = 0{,}408,$$

$$\sqrt{\beta_1} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}816,$$

Scanned with OKEN Scanner

cu care ecuația de stabilitate devine

$$E = 0{,}334 \operatorname{tg} v_1 \operatorname{tg} v_3 + 0{,}408 \operatorname{tg} v_2 \operatorname{tg} v_3 + 0{,}816 \operatorname{tg} v_1 \operatorname{tg} v_2 - 1 = 0.$$

Încercarea 1.

$$v_3 = v_1 = 0{,}65, \quad v_2 = 0{,}796,$$
$$\operatorname{tg} v_1 = \operatorname{tg} v_3 = 0{,}760, \quad \operatorname{tg} v_2 = 1{,}022,$$
$$E = 0{,}142.$$

Încercarea 2.

$$v_3 = v_1 = 0{,}62, \quad v_2 = 0{,}76,$$
$$\operatorname{tg} v_1 = \operatorname{tg} v_3 = 0{,}713, \quad \operatorname{tg} v_2 = 0{,}950,$$
$$E = -0{,}002.$$

Valorile critice ale parametrilor sînt:

$$v_{cr_1} = v_{cr_3} = 0{,}62, \quad v_{cr_2} = 0{,}76.$$

Lungimile de flambaj corespunzătoare au valorile:

$$l_{f_1} = l_{f_3} = \frac{\pi}{v_{cr_1}} l_1 = 5{,}067\, l_1 = 1{,}689 l,$$

$$l_{f_2} = \frac{\pi}{v_{cr_2}} l_2 = 4{,}134\, l_2 = 1{,}378\, l.$$

Problema 17.13. Pentru bara de la aplicația precedentă, considerînd capătul superior cu încastrare glisantă (fig. 17.13), să se determine valorile parametrilor critici de încărcare axială și lungimile de flambaj ale celor trei tronsoane.

Elementele caracteristice sînt aceleași ca la aplicația precedentă și anume:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1,$$
$$\beta_1 = \frac{2}{3}, \quad \beta_2 = \frac{1}{3}, \quad \beta_3 = \frac{1}{2}.$$

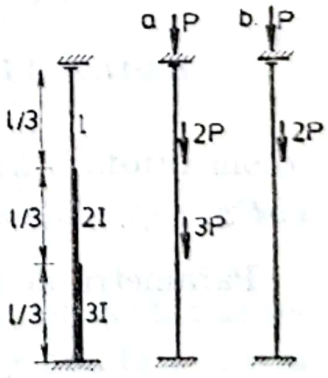


Fig. 17.13

Cazul a.

Parametrii de încărcare axială sînt:

$$v_3 = \frac{l}{3}\sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad v_2 = 1{,}225 v_3, \quad v_1 = 1{,}414\, v_3.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația de stabilitate are forma (XVII.2, e)

$$\sqrt{\beta_2\alpha_4}\,\operatorname{tg} v_1 \operatorname{cotg} v_3 + \sqrt{\beta_3\alpha_5}\,\operatorname{tg} v_2 \operatorname{cotg} v_3 - \sqrt{\beta_1\alpha_6}\,\operatorname{tg} v_1 \operatorname{tg} v_2 + 1 = 0.$$

Cu datele problemei rezultă:

$$\sqrt{\beta_2\alpha_4} = 0{,}236,\quad \sqrt{\beta_3\alpha_5} = 0{,}408,\quad \sqrt{\beta_1\alpha_6} = 0{,}577,$$

iar ecuația de stabilitate se scrie

$$0{,}236 \operatorname{tg} v_1 \operatorname{cotg} v_3 + 0{,}408 \operatorname{tg} v_2 \operatorname{cotg} v_3 - 0{,}577 \operatorname{tg} v_1 \operatorname{tg} v_2 + 1 = 0$$

Încercarea 1.

$$v_3 = 0{,}75,\quad v_2 = 0{,}919,\quad v_1 = 1{,}06,$$

$$\operatorname{ctg} v_3 = 1{,}072,\quad \operatorname{tg} v_2 = 1{,}310,\quad \operatorname{tg} v_1 = 1{,}786,$$

$$E = 0{,}925.$$

Încercarea 2.

$$v_3 = 0{,}85,\quad v_2 = 1{,}04,\quad v_1 = 1{,}20,$$

$$\operatorname{cotg} v_3 = 0{,}878,\quad \operatorname{tg} v_2 = 1{,}708,\quad \operatorname{tg} v_1 = 2{,}586,$$

$$E = -0{,}401.$$

Prin interpolare liniară rezultă:

$$v_{cr_3} = 0{,}82,\quad v_{cr_2} = 1{,}004,\quad v_{cr_1} = 1{,}16.$$

Lungimile de flambaj ale celor trei tronsoane au valorile:

$$l_{f_1} = \frac{\pi}{v_{cr_1}}\, l_1 = 2{,}708\; l_1 = 0{,}9027\, l,$$

$$l_{f_2} = \frac{\pi}{v_{cr_2}}\, l_2 = 3{,}129\; l_2 = 1{,}043\, l,$$

$$l_{f_3} = \frac{\pi}{v_{cr_3}}\, l_3 = 3{,}831\; l_3 = 1{,}277\, l.$$

Cazul b.

Parametrii de încărcare axială sînt:

$$v_3 = \frac{l}{3}\sqrt{\frac{P}{EI}},\quad v_2 = 1{,}225\, v_3,\quad v_1 = v_3.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația de stabilitate are forma (XVII.2, *f*)

$$\sqrt{\beta_2\alpha_5}\,\mathrm{tg}\,v_1\,\mathrm{cotg}\,v_3+\sqrt{\beta_3\alpha_5}\,\mathrm{tg}\,v_2\,\mathrm{cotg}\,v_3-\sqrt{\beta_1}\,\mathrm{tg}\,v_1\,\mathrm{tg}\,v_2+1=0.$$

Se calculează apoi:

$$\sqrt{\beta_2\alpha_5}=0{,}334,\quad \sqrt{\beta_3\alpha_5}=0{,}408,\quad \sqrt{\beta_1}=0{,}816$$

și se obține ecuația de stabilitate

$$E=0{,}334\,\mathrm{tg}\,v_1\,\mathrm{cotg}\,v_3+0{,}408\,\mathrm{tg}\,v_2\,\mathrm{cotg}\,v_3-0{,}816\,\mathrm{tg}\,v_1\,\mathrm{tg}\,v_2+1=0.$$

Încercarea 1.

$$v_3=0{,}86,\quad v_2=1{,}0535,\quad v_1=0{,}86,$$

$$\mathrm{cotg}\,v_3=0{,}861,\quad \mathrm{tg}\,v_2=1{,}7575,\quad \mathrm{tg}\,v_1=1{,}161,$$

$$E=0{,}286.$$

Încercarea 2.

$$v_3=0{,}90,\quad v_2=1{,}102,\quad v_1=0{,}90,$$

$$\mathrm{cotg}\,v_3=0{,}7935,\quad \mathrm{tg}\,v_2=1{,}977,\quad \mathrm{tg}\,v_1=1{,}260,$$

$$E=-0{,}058.$$

Se consideră ca valori critice, valorile obținute în încercarea a doua.

Lungimile de flambaj sînt:

$$l_{f_1}=l_{f_3}=3{,}49\,l_1=1{,}163\,l,$$

$$l_{f_2}=2{,}851\,l_2=0{,}950\,l.$$

2. STABILITATEA STRUCTURILOR ÎN FORMĂ DE CADRE

Problema stabilității cadrelor poate fi studiată cu ajutorul metodelor generale ale Staticii construcțiilor — metoda forțelor și metoda deplasărilor.

Deoarece calculul de ordinul II al cadrelor a fost prezentat anterior numai prin metoda deplasărilor, și calculul de stabilitate va fi tratat numai prin această metodă.

Scanned with OKEN Scanner

Calculul de stabilitate reprezintă un caz particular al calculului de ordinul II și anume, cazul în care forțele sînt aplicate numai în noduri și astfel încît, pentru valori mai mici decît valoarea critică, să nu producă decît forțe axiale în barele cadrului. Cu alte cuvinte termenii liberi ai ecuațiilor de condiție sînt toți egali cu zero, iar sistemul devine un sistem de ecuații omogene, de forma:

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} Z_j = 0. \quad i = (1, \ldots, n) \qquad \text{(XVII.4)}$$

Sistemul de ecuații (XVII.4) admite două tipuri de soluții: $Z_j = 0$ și $Z_j \neq 0$.

Soluția banală $Z_j = 0$ nu este interesantă deoarece ea corespunde fie formei nedeformate a structurii reale, ceea ce înseamnă că forțele P_i nu au ajuns la valoarea critică, fie pierderii stabilității sistemului de bază, care fiind multiplu static nedeterminat își pierde stabilitatea la valori ale forțelor axiale mai mari decît valoarea critică a structurii reale.

Soluția interesantă este $Z_j \neq 0$ și se obține din condiția ca determinantul coeficienților necunoscutelor $D|r_{ij}|$ să fie egal cu zero:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \ldots r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} \ldots r_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} \ldots r_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(XVII.5)}$$

Condiția (XVII.5) reprezintă ecuația caracteristică sau ecuația de stabilitate.

Deoarece coeficienții necunoscutelor sînt funcții de parametrul de încărcare axială, parametru necunoscut, rezultă că ecuația de stabilitate se rezolvă prin încercări.

Reducerea numărului de încercări se poate obține dacă se au în vedere următoarele:

— în calculul de ordinul I, corespunzător echilibrului stabil,

$$D|r_{ij}| > 0 \text{ și } v_i = 0,$$

— în cazul în care $v_i \neq 0$ și pe măsură ce valorile acestor parametri cresc, valoarea determinatului coeficienților scade, astfel încît pentru $v_i = v_{cr_i}$ se obține $D|r_{ij}| = 0$,

— situația $D|r_{ij}| < 0$ indică faptul că parametrul de încărcare axială ales este mai mare decît parametrul critic și ca atare soluția reală corespunde unei valori mai mici a parametrului v.

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, se poate utiliza o formulă de interpolare — extrapolare, avînd expresia

$$v_{cr} = v^{(1)} + \frac{[v^{(2)} - v^{(1)}]\, D_1}{D_1 - D_2} = \frac{v^{(2)} D_1 - v^{(1)} D_2}{D_1 - D_2}, \qquad \text{(XVII.6)}$$

unde $v^{(1)}$ și $v^{(2)}$ sînt valorile parametrului de referință, utilizate în două încercări succesive de rezolvare a ecuației de stabilitate, iar D_1 și D_2 sînt valorile determinantului pentru $v^{(1)}$ și respectiv $v^{(2)}$.

În cazul structurilor simetrice, încărcate cu forțe axiale simetrice, apare ca necesar studiul posibilității pierderii stabilității atît printr-o deformată simetrică, cît și printr-o deformată antisimetrică. Calculul practic al structurilor simetrice se poate efectua fie utilizînd procedeul grupării necunoscutelor, fie lucrînd pe semistructură.

APLICAȚII

Problema 17.14. Să se determine parametrul critic de încărcare axială și lungimile de flambaj, pentru stîlpii structurii din figura 17.14.

Din punct de vedere al metodei deplasărilor structura comportă o singură necunoscută, deplasarea pe direcția gradului de libertate.

Ecuația de condiție este $r_{11} Z_1 = 0$, iar ecuația de stabilitate are forma $r_{11} = 0$.

Alegînd $i_0 = \dfrac{EI}{6}$, se obțin rigiditățile practice ale barelor, care au fost înscrise pe sistemul de bază.

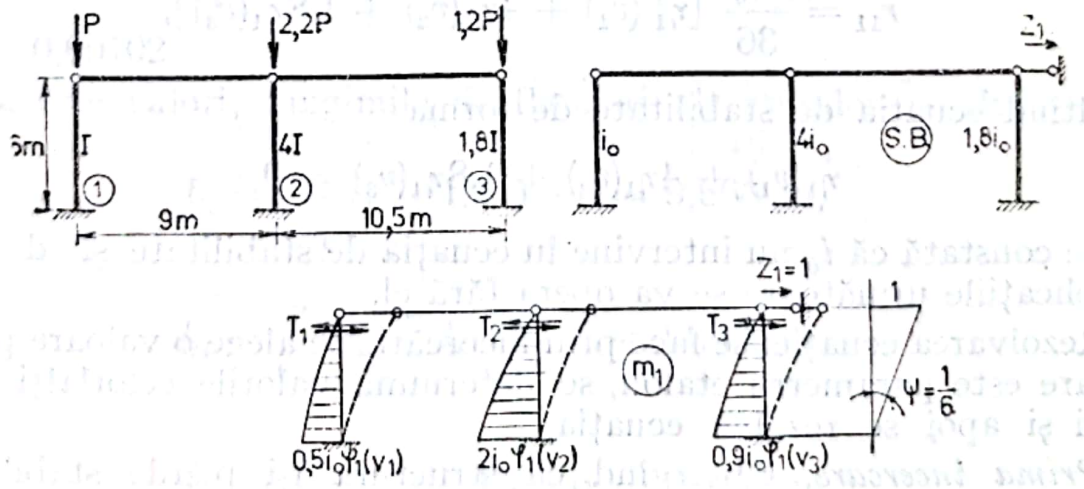


Fig. 17.14

Scanned with OKEN Scanner

Parametrii de încărcare axială ai stîlpilor sînt:

$$v_1 = l_1 \sqrt{\frac{N_1}{EI_1}} = 6 \sqrt{\frac{P}{EI}},$$

$$v_2 = l_2 \sqrt{\frac{N_2}{EI_2}} = 6 \sqrt{\frac{2{,}2P}{4EI}} = 0{,}7416\, v_1,$$

$$v_3 = l_3 \sqrt{\frac{N_3}{EI_3}} = 6 \sqrt{\frac{1{,}2\,P}{1{,}8\,EI}} = 0{,}8165\, v_1.$$

Parametrii v_2 și v_3 s-au exprimat funcție de parametrul v_1, considerat parametru etalon.

Încărcînd sistemul de bază cu deplasarea $Z_1 = 1$, rezultă diagrama m_1. Valorile momentelor încovoietoare din secțiunile de reazem au fost înscrise direct pe diagramă, iar valorile forțelor tăietoare sînt:

$$t_{11} = \frac{3i_0}{l^2}\ \eta_1(v_1) = \frac{3i_0}{36}\ \eta_1(v_1),$$

$$t_{21} = \frac{12i_0}{36}\ \eta_1(v_2),$$

$$t_{31} = \frac{5{,}4i_0}{36}\ \eta_1(v_3).$$

Condiția de echilibru conduce la

$$r_{11} = \frac{3i_0}{36}\ [\eta_1(v_1) + 4\eta_1(v_2) + 1{,}8\eta_1(v_3)],$$

rezultînd ecuația de stabilitate de forma

$$\eta_1(v_1) + 4\eta_1(v_2) + 1{,}8\eta_1(v_3) = 0.$$

Se constată că i_0 nu intervine în ecuația de stabilitate și de aceea în aplicațiile următoare se va opera fără el.

Rezolvarea ecuației se face prin încercări. Se alege o valoare pentru v_1, care este parametru etalon, se determină valorile celorlalți parametri și apoi se rezolvă ecuația.

Prima încercare. Observînd că structura își pierde stabilitatea prin deplasarea capetelor superioare ale stîlpilor, rezultă că valoarea

Scanned with OKEN Scanner

parametrului critic v_1 va fi apropiată de valoarea $\frac{\pi}{2}$, corespunzătoare cazului barei încastrate la un capăt și liberă la celălalt.

Se alege $v_1 = 1{,}80$ și rezultă: $v_2 = 1{,}335$, $v_3 = 1{,}47$.

Din anexa 6 se extrag valorile funcțiilor de corecție:

$$\eta_1(v_1) = -0{,}3191, \quad \eta_1(v_2) = 0{,}280, \quad \eta_1(v_3) = 0{,}1258.$$

Cu aceste valori, ecuația de stabilitate devine

$$-0{,}3191 + 4 \cdot 0{,}2800 + 1{,}8 \cdot 0{,}1258 = 1{,}027 > 0.$$

Echilibrul este stabil. Trebuie aleasă o valoare mai mare pentru parametrul de încărcare axială.

A doua încercare.

$$v_1 = 2{,}000, \quad v_2 = 1{,}4832, \quad v_3 = 1{,}633,$$

$$\eta_1(v_1) = -0{,}6372, \quad \eta_1(v_2) = 0{,}1616, \quad \eta_1(v_3) = -0{,}0780,$$

$$-0{,}6372 + 4 \cdot 0{,}1138 - 1{,}8 \cdot 0{,}078 = -0{,}3224 < 0.$$

Echilibrul este instabil. Valoarea aleasă depășește valoarea parametrului critic de încărcare axială.

Aplicînd formula (XVII.6) de interpolare, se obține

$$v_{cr} = \frac{v^{(2)} D_1 - v^{(1)} D_2}{D_1 - D_2} = \frac{7{,}00 \cdot 1{,}027 - 1{,}80\,(-0{,}3224)}{1{,}027 + 0{,}3224} = 1{,}95.$$

În consecință:

$$v_{cr_1} = 1{,}95, \quad v_{cr_2} = 1{,}45, \quad v_{cr_3} = 1{,}59,$$

iar $D = 0{,}00102$.

Cu aceste valori, lungimile de flambaj ale stîlpilor rezultă:

$$l_{f_1} = \frac{\pi}{v_{cr_1}} l_1 = 1{,}611 \cdot 6 = 9{,}666 \text{ m},$$

$$l_{f_2} = \frac{\pi}{v_{cr_2}} l_2 = 2{,}166 \cdot 6 = 12{,}099 \text{ m},$$

$$l_{f_3} = \frac{\pi}{v_{cr_3}} l_3 = 1{,}476 \cdot 6 = 11{,}855 \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se constată că lungimile de flambaj ale celor trei stîlpi nu sînt egale. Coeficienții lungimilor de flambaj au valori mai mici decît 2, pentru stîlpii marginali și valoare mai mare decît 2, pentru stîlpul central.

Observație. Dacă reacțiunea r_{11} se calculează utilizînd principiul lucrului mecanic virtual, atunci, pentru obținerea rezultatului corect, trebuie introdus lucrul mecanic al cuplului forțelor verticale, deplasarea virtuală fiind dată din poziția deformată. Forma acestei ecuații este

$$r_{11} \cdot 1 - \frac{3}{6}\, i_0 \varphi_1(v_1)\, \psi + Pl\psi - \frac{4}{6}\, i_0 \varphi_1(v_2)\, \psi + 2{,}2\, Pl\psi -$$

$$- \frac{1{,}8}{6}\, i_0 \varphi_1(v_3)\, \psi + 1{,}2\, Pl\psi = 0.$$

Observînd că $P = \dfrac{v^2 EI}{l^2}$, rezultă $P = \dfrac{v^2 i_0}{l} = \dfrac{v^2 i_0}{6}$. Suma termenilor 2 și 3 este atunci

$$\frac{3i_0}{6}\, \psi \left[\varphi_1(v_1) + \frac{v^2}{3} \right] = \frac{3i_0}{36}\, \eta_1(v_1) = t_{11},$$

deci $r_{11} = T_1 + T_2 + T_3$, adică același rezultat cu cel obținut anterior prin ecuația de proiecții.

Problema 17.15. Să se determine parametrul critic de încărcare axial și lungimile de flambaj ale stîlpilor, la structura din figura 17.15. Rigla se consideră infinit rigidă.

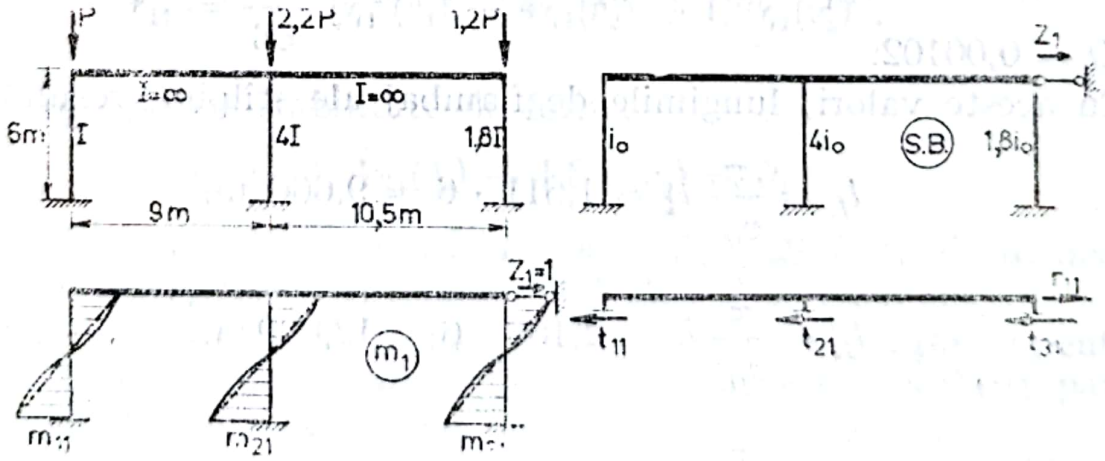


Fig. 17.15

Ecuaţia de condiţie este $r_{11}Z_1 = 0$, iar ecuaţia de stabilitate are forma $r_{11} = 0$.

Momentele încovoietoare din secţiunile de la capetele stîlpilor, pentru $\psi = \frac{1}{6}$, sînt:

$$m_{11} = 6 \cdot 1\,\psi\varphi_4(v_1) = \varphi_4(v_1),$$

$$m_{21} = 6 \cdot 4\psi\varphi_4(v_2) = 4\varphi_4(v_2),$$

$$m_{31} = 6 \cdot 1{,}8\psi\varphi_4(v_3) = 1{,}8\varphi_4(v_3),$$

iar forţele tăietoare au expresiile:

$$t_{11} = \frac{12 \cdot 1}{6}\,\psi\,\eta_2(v_1) = \frac{1}{3}\,\eta_2(v_1).$$

$$t_{21} = \frac{12 \cdot 4}{6}\,\psi\eta_2(v_2) = \frac{4}{3}\,\eta_2(v_2),$$

$$t_{31} = \frac{12 \cdot 1{,}8}{6}\,\psi\,\eta_2(v_3) = \frac{1{,}8}{3}\,\eta_2(v_3).$$

Reacţiunea r_{11} rezultă

$$r_{11} = \frac{1}{3}\,[\eta_2(v_1) + 4\eta_2(v_2) + 1{,}8\eta_2(v_3)],$$

iar ecuaţia de stabilitate se scrie

$$\eta_2(v_1) + 4\eta_2(v_2) + 1{,}8\eta_2(v_3) = 0.$$

Parametrii de încărcare axială sînt:

$$v_1 = 6\sqrt{\frac{P}{EI}},$$

$$v_2 = 6\sqrt{\frac{2{,}2P}{4EI}} = 0{,}7416\,v_1,$$

$$v_3 = 6\sqrt{\frac{1{,}2P}{1{,}8EI}} = 0{,}8165\,v_1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvarea ecuației prin încercări:

Prima încercare.

$$v_1 = 3{,}60, \quad \eta_2(v_1) = -0{,}3191,$$
$$v_2 = 2{,}67, \quad \eta_2(v_2) = 0{,}2806,$$
$$v_3 = 2{,}94, \quad \eta_2(v_3) = 0{,}2159.$$
$$-0{,}3191 + 1{,}1224 + 0{,}38862 = 1{,}1919 > 0.$$

Trebuie aleasă o valoare mai mare, dar în așa fel încît și $\eta_2(v_3)$ să fie negativă, deci cînd $v_3 > \pi$.

A doua încercare.

$$v_1 = 3{,}90, \quad \eta_2(v_1) = -0{,}5542,$$
$$v_2 = 2{,}89, \quad \eta_2(v_2) = 0{,}1557,$$
$$v_3 = 3{,}18, \quad \eta_2(v_3) = -0{,}0249.$$
$$-0{,}5542 + 0{,}6228 - 0{,}0448 = 0{,}0237.$$

Aplicînd formula de extrapolare, rezultă

$$v_{cr} = \frac{v^{(2)} D_1 - v^{(1)} D_2}{D_1 - D_2} = \frac{3{,}90 \cdot 1{,}1909 - 360 \cdot 0{,}0237}{1{,}1919 - 0{,}0237} = 3{,}91.$$

În consecință:

$$v_{cr_1} = 3{,}91, \; v_{cr_2} = 2{,}90, \; v_{cr_3} = 3{,}19.$$

Cu aceste valori se obțin următoarele lungimi de flambaj:

$$l_{f_1} = \frac{\pi}{v_{cr_1}} l_1 = 0{,}803 \cdot 6 = 4{,}818 \text{ m},$$

$$l_{f_2} = \frac{\pi}{v_{cr_2}} \cdot l_2 = 1{,}083 \cdot 6 = 6{,}500 \text{ m},$$

$$l_{f_3} = \frac{\pi}{v_{cr_3}} l_3 = 0{,}985 \cdot 6 = 5{,}908 \text{ m}.$$

Observație. Comparînd rezultatele obținute în acest caz, cu cele obținute în aplicația precedentă, se constată că, adoptînd soluția cu riglă infinit rigidă și rigid legată de stîlpi, se obțin valori mai mari ale parametrilor de încărcare axială și respectiv lungimi de flambaj mai mici.

Scanned with OKEN Scanner

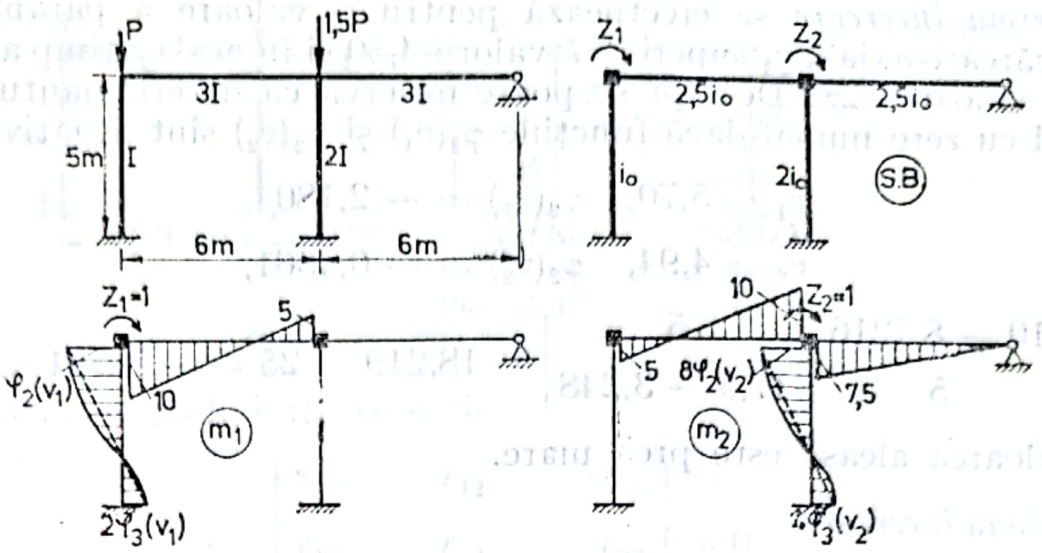


Fig. 17.16

Problema 17.16. Să se determine parametrul critic de încărcare axială și lungimile de flambaj ale stîlpilor, la structura din figura 17.16.

Structura este cu noduri fixe, avînd două necunoscute; rotirile nodurilor. Ecuația de stabilitate are forma generală

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Rigiditățile practice, înscrise direct pe sistemul de bază, au fost calculate considerînd $i_0 = \dfrac{EI}{5}$.

Parametrii de încărcare axială sînt:

$$v_1 = 5\sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad v_2 = 5\sqrt{\frac{1{,}5P}{2EI}} = 0{,}866\ v_1.$$

Reacțiunile unitare au valorile:

$$r_{11} = 10 + 4\varphi_2(v_1), \quad r_{12} = r_{21} = 5,$$
$$r_{22} = 17{,}5 + 8\varphi_2(v_2).$$

Cu aceste valori ale reacțiunilor unitare, ecuația de stabilitate devine

$$\begin{vmatrix} 10 + 4\varphi_2(v_1) & 5 \\ 5 & 17{,}5 + 8\varphi_2(v_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prima încercare se efectuează pentru o valoare a parametrului de încărcare axială v_1 superioară valorii 4,50 și în același timp apropiată de valoarea 2π. De fapt se poate observa că determinantul poate fi egal cu zero numai dacă funcțiile $\varphi_2(v_1)$ și $\varphi_2(v_2)$ sînt negative.

$$v_1 = 5{,}70, \quad \varphi_2(v_1) = -2{,}1804,$$

$$v_2 = 4{,}94, \quad \varphi_2(v_2) = -0{,}4061,$$

$$\begin{vmatrix} 10 - 8{,}7216 & 5 \\ 5 & 17{,}5 - 3{,}248 \end{vmatrix} = 18{,}219 - 25 = -6{,}781 < 0.$$

Valoarea aleasă este prea mare.

A doua încercare

$$v_1 = 5{,}65, \quad \varphi_2(v_1) = -1{,}9484,$$

$$v_2 = 4{,}89, \quad \varphi_2(v_2) = -0{,}3503,$$

$$\begin{vmatrix} 10 - 7{,}7936 & 5 \\ 5 & 17{,}5 - 2{,}802 \end{vmatrix} = 32{,}429 - 25 = 7{,}429 > 0.$$

Aplicînd formula de interpolare, rezultă

$$v_{cr} = \frac{v^{(2)} D_1 - v^{(1)} D_2}{D_1 - D_2} = \frac{5{,}70 \cdot 7{,}429 - 5{,}65(-6{,}781)}{7{,}429 - 6{,}781} = 5{,}676.$$

Prin urmare valorile critice ale parametrilor de încărcare axială sînt: $v_{cr_1} = 5{,}676$ și $v_{cr_2} = 4{,}915$.

Lungimile de flambaj au valorile:

$$l_{f_1} = \frac{\pi}{v_{cr_1}} l_1 = 0{,}553 \cdot 5 = 2{,}767 \text{ m},$$

$$l_{f_2} = \frac{\pi}{v_{cr_2}} l_2 = 0{,}639 \cdot 5 = 3{,}196 \text{ m}.$$

Problema 17.17. Să se determine parametrul critic de încărcare axială și lungimile de flambaj ale stîlpilor, la structura din figura 17.17. Să se compare rezultatele cu cele obținute la aplicația precedentă.

Structura este aceeași ca la aplicația 17.14, cu deosebirea că reazemul de la nivelul riglei este, în acest caz, un reazem simplu. Deci structura este cu noduri deplasabile.

Scanned with OKEN Scanner

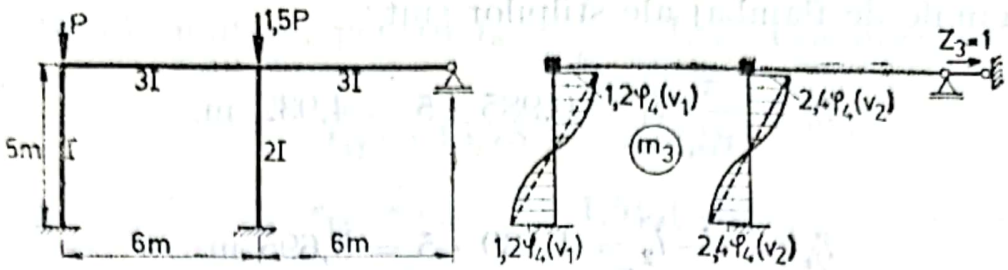


Fig. 17.17

Ecuația de stabilitate se scrie

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Diagramele unitare m_1 și m_2 și reacțiunile r_{11}, r_{12}, r_{21} și r_{22} rămîn aceleași. Din diagrama m_3 rezultă

$$r_{13} = r_{31} = -1{,}2\varphi_4(v_1), \quad r_{23} = r_{32} = -2{,}4\varphi_4(v_2),$$

$$r_{33} = \frac{2{,}4}{5}\eta_2(v_1) + \frac{4{,}8}{5}\eta_2(v_2).$$

Ecuația de stabilitate devine

$$\begin{vmatrix} 10 + 4\varphi_2(v_1) & 5 & -1{,}2\varphi_4(v_1) \\ 5 & 17{,}5 + 8\varphi_2(v_2) & -2{,}4\varphi_4(v_2) \\ -1{,}2\,\varphi_4(v_1) & -2{,}4\varphi_4(v_2) & 0{,}48\eta_2(v_1) + 0{,}96\eta_2(v_2) \end{vmatrix} = 0$$

Existența posibilității de deplasare pe direcția gradului de libertate face ca, în comparație cu cazul precedent, parametrii critici să fie mai mici.

Pentru $v_1 = 3{,}10$ și $v_2 = 2{,}685$ (deoarece $v_2 = 0{,}866v_1$), valoarea determinantului este $D = 17{,}416$.

Pentru $v_1 = 3{,}25$ și $v_2 = 2{,}81$, $D = -12{,}377$.

Pentru $v_1 = 3{,}18$ și $v_2 = 2{,}75$, $D = 0{,}996$.

Rezultă următoarele valori ale parametrilor critici:

$$v_{cr_1} = 3{,}185 \text{ și } v_{cr_1} = 2{,}758.$$

Scanned with OKEN Scanner

Lungimile de flambaj ale stîlpilor sînt:

$$l_{f_1} = \frac{\pi}{v_{cr_1}} l_1 = 0{,}985 \cdot 5 = 4{,}932 \text{ m.}$$

$$l_{f_2} = \frac{\pi}{v_{cr_2}} l_2 = 1{,}139 \cdot 5 = 5{,}695 \text{ m.}$$

Observație. Comparativ cu exemplul precedent se constată că existența posibilității de translație pe direcția gradului de libertate conduce la valori mai mici ale parametrilor critici și la valori mai mari ale lungimilor de flambaj.

Problema 17.18. Să se determine parametrul critic de încărcare axială, la structura din figura 17.18.

Structura este cu noduri deplasabile. Ecuația de stabilitate are forma generală

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Parametrii de încărcare axială sînt:

$$v_1 = 6\sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad v_2 = 6\sqrt{\frac{2P}{1{,}5\,EI}} = 1{,}1547 v_1.$$

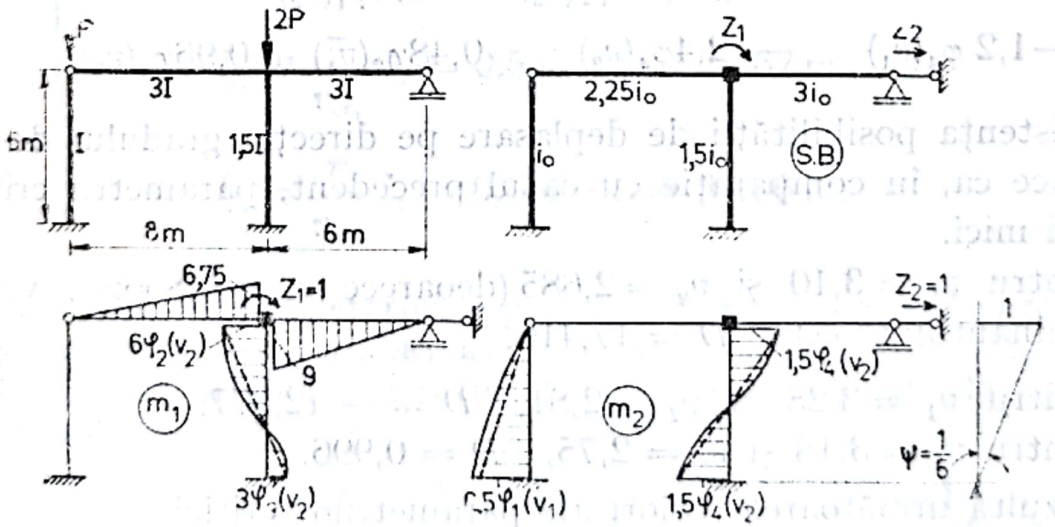


Fig. 17.18

Reacțiunile unitare, pentru $i_0 = \frac{I}{6} = 1$, se calculează:

$$r_{11} = 15{,}75 + 6\varphi_2(v_2),$$

$$r_{12} = r_{21} = -1{,}5\varphi_4(v_2),$$

$$r_{22} = \frac{3}{36}\eta_1(v_1) + \frac{3}{6}\eta_2(v_2).$$

Cu aceste valori se obține ecuația de stabilitate

$$\begin{vmatrix} 15{,}75 + 6\varphi_2(v_2) & -1{,}5\varphi_4(v_2) \\ -1{,}5\varphi_4(v_2) & \frac{1}{12}\eta_1(v_1) + \frac{1}{2}\eta_2(v_2) \end{vmatrix} = 0.$$

În prima încercare efectuată, cu valorile $v_1 = 2{,}30$ și $v_2 = 2{,}65$, rezultă $D = -0{,}784$.

Pentru $v_1 = 2{,}25$ și $v_2 = 2{,}60$, valoarea determinantului $D = -0{,}364$.

Prin extrapolare se obține

$$v_{cr} = \frac{2{,}30(-0{,}364) - 2{,}25(-0{,}784)}{-0{,}364 + 0{,}784} = 2{,}207.$$

Alegînd $v_{cr_1} = 2{,}21$ și $v_{cr_2} = 2{,}55$, rezultă $D = 0{,}0184$.

Problema 17.19. Să se determine parametrii critici de încărcare axială, la structura din figura 17.19.

Structura este simetrică și încărcată simetric. Se studiază pierderea de stabilitate prin deformata antisimetrică, survenită la deplasarea laterală a nodurilor.

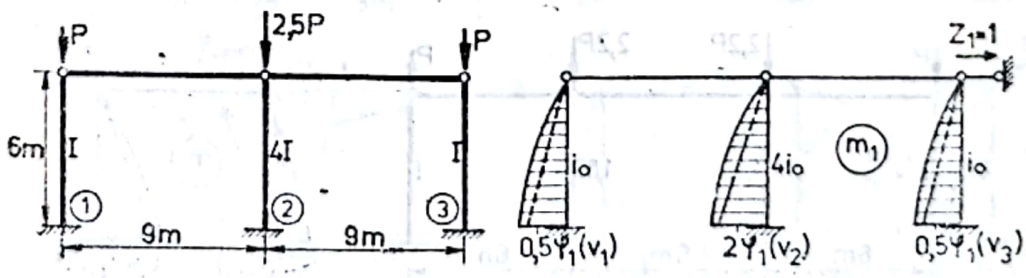


Fig. 17.19

Scanned with OKEN Scanner

Parametrii de încărcare axială:

$$v_1 = v_3 = 6\sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad v_2 = 6\sqrt{\frac{2{,}4P}{4EI}} = 0{,}774\, v_1,$$

Ecuația de stabilitate este $r_{11} = 0$, deci

$$r_{11} = \frac{1}{12}\eta_1(v_1) + \frac{4}{12}\eta_1(v_2) + \frac{1}{12}\eta_1(v_3) = 0.$$

Observînd că $v_1 = v_3$ și simplificînd, se obține

$$\eta_1(v_1) + 2\eta_1(v_2) = 0.$$

Pentru $v_1 = 1{,}75$ și $v_2 = 1{,}35$, rezultă $D = 0{,}2825$,
Pentru $v_1 = 1{,}85$ și $v_2 = 1{,}432$, rezultă $D = -0{,}0485$.
Alegînd $v_{cr_1} = 1{,}835$ și $v_{cr_2} = 1{,}420$, rezultă $D = -0{,}002$.

Problema 17.20. Să se determine parametrul critic de încărcare axială, la structura din figura 17.20.

Structura este simetrică și încărcată simetric. În deformata antisimetrică efortul axial din rigla centrală este egal cu zero și în consecință rezolvarea se poate conduce pe semistructură.

Ecuația de stabilitate este

$$r_{11} = \frac{3}{36}\eta_1(v_1) + \frac{5{,}4}{36}\eta_1(v_2) = 0$$

sau după simplificări

$$\eta_1(v_1) + 1{,}8\eta_1(v_2) = 0.$$

Parametrii de încărcare axială sînt:

$$v_1 = 6\sqrt{\frac{P}{EI}} \text{ și } v_2 = 6\sqrt{\frac{2{,}2P}{1{,}8\,EI}} = 1{,}105\, v_1.$$

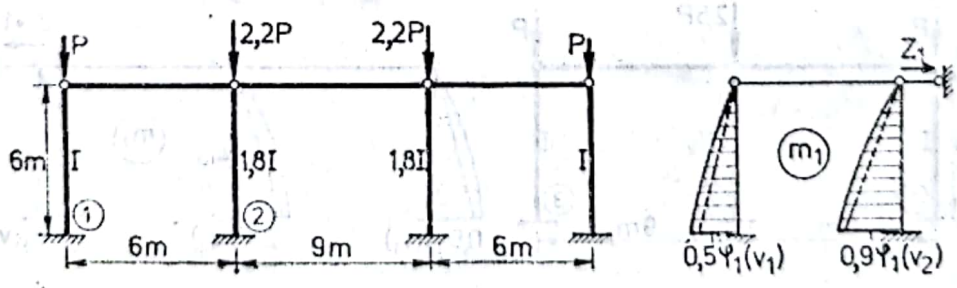


Fig. 17.20

Pentru $v_1 = 1{,}45$ și $v_2 = 1{,}60$, rezultă $D = 0{,}0818$.
Pentru $v_1 = 1{,}47$ și $v_2 = 1{,}62$, rezultă $D = 0{,}0096$.
Se aleg: $v_{cr_1} = 1{,}473$ și $v_{cr_2} = 1{,}628$.

Problema 17.21. Să se determine parametrii critici de încărcare axială, la structura din figura 17.21.

Structura este simetrică și încărcată simetric. Se studiază pierderea stabilității prin deformata antisimetrică.

Parametrii de încărcare sînt:

$$v_1 = 5\sqrt{\frac{P}{EI}} \text{ și } v_1 = 5\sqrt{\frac{2P}{3EI}} = 0{,}8165\, v_1.$$

Ecuația de stabilitate are forma generală

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Reacțiunile unitare sînt:

$$r_{11} = 18 + 12\,\varphi_2(v_2),$$

$$r_{12} = r_{21} = -\,3{,}6\,\varphi_4(v_2),$$

$$r_{22} = \frac{1}{10}\,\eta_1(v_1) + \frac{7{,}2}{5}\,\eta_2(v_2) + \frac{1}{10}\,\eta_1(v_1) = \frac{1}{5}\,\eta_1(v_1) + \frac{7{,}2}{5}\,\eta_2(v_2).$$

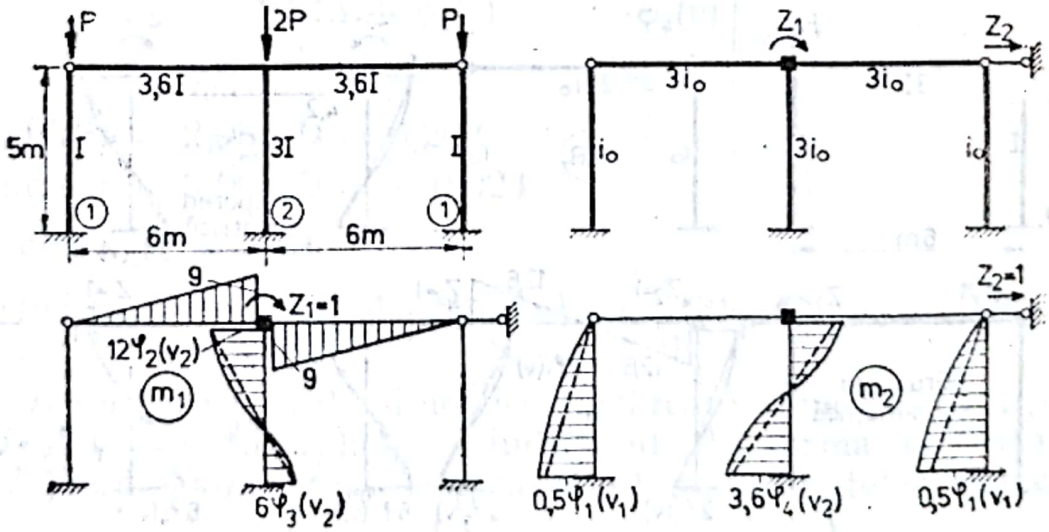


Fig. 17.21

Ecuația de stabilitate devine

$$\begin{vmatrix} 18 + 12\varphi_2(v_2) & -3{,}6\varphi_4(v_2) \\ -3{,}6\varphi_4(v_2) & 0{,}2\eta_1(v_1) + 1{,}44\eta_2(v_2) \end{vmatrix} = 0$$

Pentru $v_1 = 2{,}50$ și $v_2 = 2{,}04$, se obține $D = 3{,}419$.
Pentru $v_1 = 2{,}60$ și $v_2 = 2{,}12$, se obține $D = 0{,}840$.
Se reține ca valori critice, $v_{cr_1} = 2{,}63$ și $v_{cr_2} = 2{,}15$.

Observație. Rezolvarea se poate conduce pe semistructură, considerînd stîlpul central cu $I_2 = 1{,}5\ I$ și forța axială egală cu P. În acest mod, parametrul de încărcare axială v_2 are valoarea $v_2 = 5\sqrt{\frac{P}{1{,}5EI}} = 0{,}8165 v_1$, deci aceeași ca în cazul întregii structuri.

Reacțiunile unitare rezultă.

$$r_{11} = 9 + 6\ \varphi_2(v_2),$$

$$r_{12} = r_{21} = -\ 1{,}8\ \varphi_4(v_2),$$

$$r_{22} = 0{,}1\ \eta_1(v_1) + 0{,}72\ \eta_2(v_2).$$

Parametrii critici de încărcare axială sînt aceiași:

$$v_{cr_1} = 2{,}63 \quad \text{și} \quad v_{cr_2} = 2{,}15.$$

Problema 17.22. Să se determine parametrul critic de încărcare axială, la structura simetrică din figura 17.22.

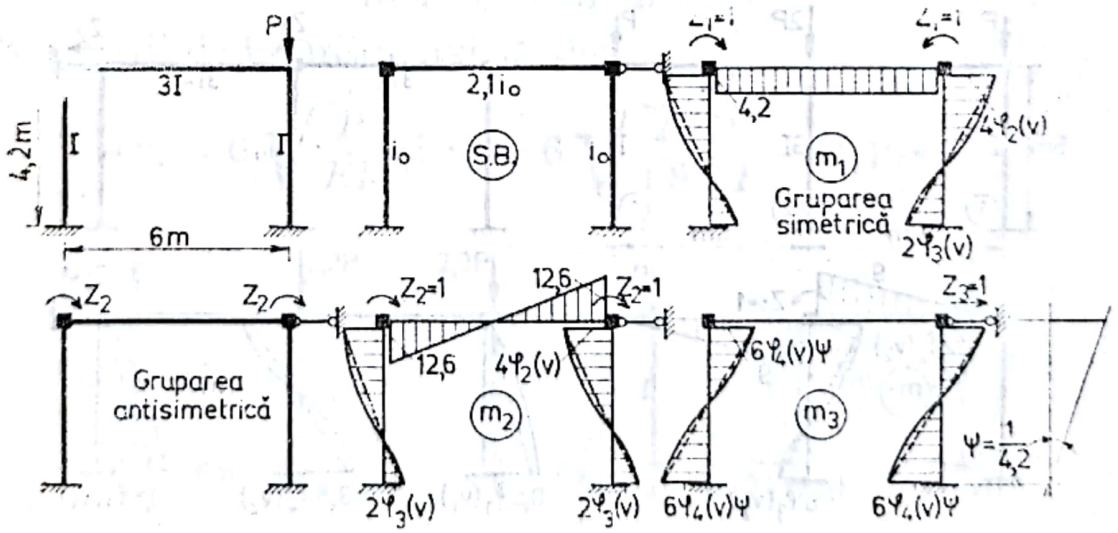


Fig. 17.22

Se studiază posibilităţile de pierdere a stabilităţii prin deformată simetrică şi prin deformată antisimetrică, reţinînd ca parametru de încărcare axială valoarea minimă.

Deformata simetrică.

Ecuaţia de stabilitate este $r_{11} = 0$, unde r_{11} are expresia

$$r_{11} = 2[4{,}2 + 4\,\varphi_2(v)].$$

Rezolvînd ecuaţia se obţine

$$\varphi_2(v) = -1{,}05.$$

Din tabele rezultă $v_{cr}^{s} = 5{,}35$, iar apoi $\mu = \dfrac{\pi}{v_{cr}^{s}} = 0{,}587$.

Deformata antisimetrică.

Ecuaţia de stabilitate are forma

$$\begin{vmatrix} r_{22} & r_{23} \\ r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Reacţiunile unitare sînt:

$$r_{22} = 2[12{,}6 + 4\,\varphi_2(v)], \quad r_{23} = r_{32} = -2 \cdot 6\,\varphi_4(v)\,\frac{1}{4{,}2},$$

$$r_{33} = 2 \cdot \frac{12}{4{,}2}\,\eta_2(v).$$

Ecuaţia de stabilitate devine

$$\begin{vmatrix} 3{,}15 + \varphi_2(v) & -\varphi_4(v) \\ -\varphi_4(v) & 2\varphi_2(v) \end{vmatrix} = 0$$

Pentru $v = 2{,}95$, $D = 0{,}202$.

Pentru $v = 3{,}00$, $D = -0{,}024$

Se alege $v_{cr}^{as} = 2{,}99$.

Coeficientul lungimii de flambaj are valoarea $\mu = \dfrac{\pi}{v_{cr}^{as}} = 1{,}05$.

Observaţie. Structurile simetrice, încărcate simetric, de tipul celei studiate în această aplicaţie, indiferent de forma deformată priu care îşi pierd stabilitatea, se încadrează între limitele: structură cu riglă articulată de stîlpi $\left(\dfrac{i_r}{i_s} = 0,\ \text{fig. } 17.23,\ \text{a}\right)$ şi structură cu

Scanned with OKEN Scanner

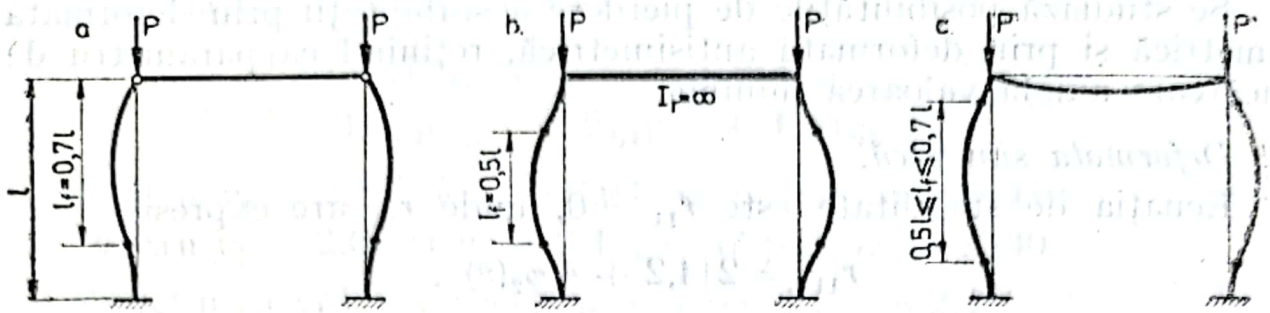


Fig. 17.23

riglă infinit rigidă $\left(\frac{i_r}{i_s} = \infty\right.$, fig. 17.23, b$\left.\right)$. Valorile coeficientului lungimii de flambaj, pentru diferite rapoarte $\frac{i_r}{i_s}$, cuprinse între cele două limite, sînt date în tabelul care urmează.

Forma deformată \ $\frac{i_r}{i_s}$	0	0,5	1	1,5	2	3	5	10	∞
Simetrică	0,700	0,654	0,625	0,605	0,589	0,568	0,545	0,523	0,500
Antisimetrică	2,00	1,26	1,16	1,11	1,08	1,05	1,03	1,02	1,00

Din analiza valorilor obținute se desprind concluziile:

— Pentru structurile la care pierderea stabilității are loc prin deformată simetrică, pe stîlpi există două puncte de inflexiune și nici unul pe riglă (fig. 17.23, c).

— Pentru structurile la care pierderea stabilității are loc prin deformată antisimetrică, chiar dacă rigla este foarte flexibilă, are loc o reducere importantă a lungimii de flambaj a stîlpului. Aceasta explică buna comportare a halelor alcătuite din elemente prefabricate, la care în schema de calcul se consideră, în mod obișnuit, articulații între riglă și stîlpi. În realitate aici se obțin legături cu un grad oarecare de încastrare, fapt care conduce la reducerea lungimii de flambaj, sub $2l$.

Scanned with OKEN Scanner

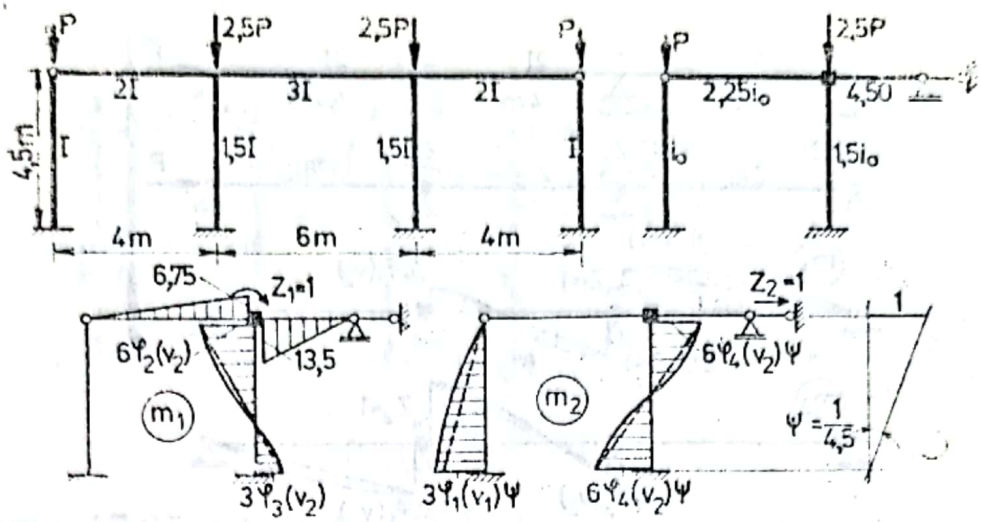


Fig. 17.24

Problema 17.23. Să se determine parametrii critici de încărcare axială, la structura simetrică din figura 17.24.

Calculul se conduce pe semistructură. Se studiază numai deformata antisimetrică.

Reacțiunile unitare sînt:

$$r_{11} = 20{,}25 + 6\,\varphi_2(\nu_2), \quad r_{12} = r_{21} = -\frac{6}{4{,}5}\,\varphi_4(\nu_2),$$

$$r_{22} = \frac{3}{4{,}5^2}\,\eta_1(\nu_1) + \frac{12}{4{,}5^2}\,\eta_2(\nu_2).$$

Forma simplificată a ecuației de stabilitate este

$$\begin{vmatrix} 3{,}375 + \varphi_2(\nu_2) & -\varphi_4(\nu_2) \\ -\varphi_4(\nu_2) & 0{,}5\eta_1(\nu_1) + 2\eta_2(\nu_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Parametrii de încărcare axială au valorile:

$$\nu_1 = 4{,}5\sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad \nu_2 = 4{,}5\sqrt{\frac{2{,}5P}{1{,}5EI}} = 1{,}291\ \nu_1.$$

Pentru $\nu_1 = 2{,}00$ și $\nu_2 = 2{,}58$, $D = 0{,}6192$.

Pentru $\nu_1 = 2{,}10$ și $\nu_2 = 2{,}71$, $D = -0{,}2981$.

Se aleg: $\nu_{cr_1} = 2{,}07$ și $\nu_{cr_2} = 2{,}67$ și rezultă $D = -0{,}0144$.

Scanned with OKEN Scanner

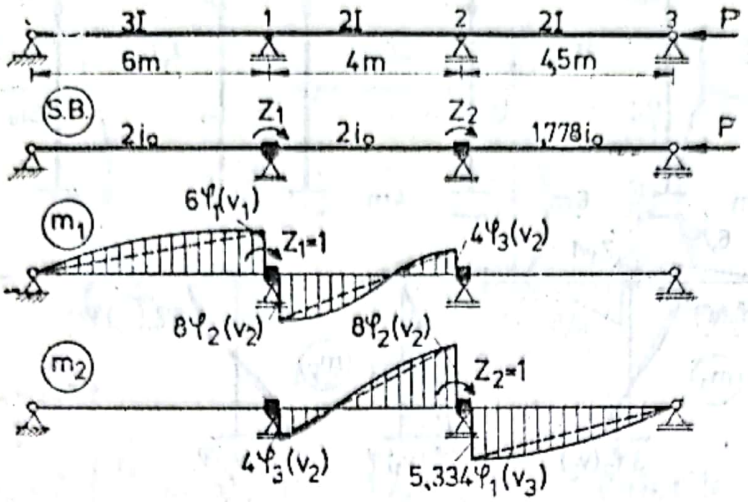


Fig. 17.25

Problema 17.24. Să se determine parametrul critic de încărcare axială, la grinda continuă din figura 17.25.

Parametrii de încărcare axială sînt:

— deschiderea 0—1, $v_1 = 6\sqrt{\frac{P}{3EI}} = 1{,}224\ v_2$,

— deschiderea 1—2, $v_2 = 4\sqrt{\frac{P}{2EI}}$,

— deschiderea 2—3, $v_3 = 4{,}5\sqrt{\frac{P}{2EI}} = 1{,}125\ v_2$.

Reacțiunile unitare au valorile:

$$r_{11} = 6\,\varphi_1(v_1) + 8\,\varphi_2(v_2), \quad r_{12} = r_{21} = 4\,\varphi_3(v_2),$$

$$r_{22} = 5{,}334\,\varphi_1(v_3) + 8\,\varphi_2(v_2).$$

Ecuația de stabilitate are forma

$$\begin{vmatrix} 1{,}5\,\varphi_1(v_1) + 2\,\varphi_2(v_2) & \varphi_3(v_2) \\ \varphi_3(v_2) & 1{,}33\,\varphi_1(v_3) + 2\,\varphi_2(v_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Pentru $v_1 = 3{,}30$, $v_2 = 2{,}70$ și $v_3 = 3{,}04$, rezultă $D = 0{,}545$.
Pentru $v_1 = 3{,}43$, $v_2 = 2{,}80$ și $v_3 = 3{,}15$, rezultă $D = -0{,}172$.
Se aleg: $v_{cr_1} = 3{,}40$, $v_{cr_2} = 2{,}78$ și $v_{cr_3} = 3{,}13$.

Scanned with OKEN Scanner

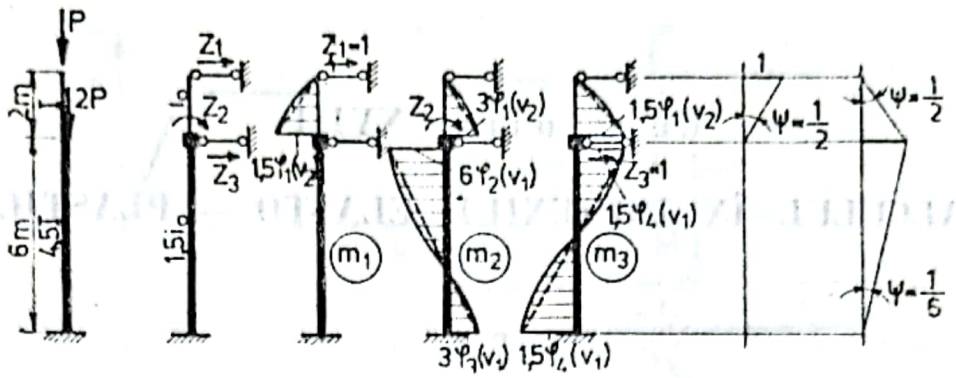


Fig. 17.26

Problema 17.25. Să se determine parametrul critic de încărcare axială la bara cu secțiune variabilă în trepte, din figura 17.26.

Rezolvarea prin metoda deplasărilor, a unei asemenea bare, conduce la un determinant de 3×3 elemente.

Elementele determinantului au expresiile:

$$r_{11} = 0{,}75\,\eta_1(v_2), \quad r_{22} = 3\,\varphi_1(v_2) + 6\,\varphi_2(v_1),$$

$$r_{33} = 0{,}5\,\eta_2(v_1) + 0{,}75\,\eta_1(v_2), \quad r_{12} = r_{21} = -1{,}5\,\varphi_1(v_2),$$

$$r_{13} = r_{31} = -0{,}75\,\eta_1(v_2), \quad r_{23} = r_{32} = 1{,}5\,\varphi_1(v_2) - 1{,}5\,\varphi_4(v_1)$$

Ecuația de stabilitate are forma

$$\begin{vmatrix} \eta_1(v_2) & -2\varphi_1(v_2) & -\eta_1(v_2) \\ -\varphi_1(v_2) & 2\varphi_1(v_2) + 4\varphi_2(v_1) & \varphi_1(v_2) - \varphi_4(v_1) \\ -\eta_1(v_2) & 2\varphi_1(v_2) - 2\varphi_4(v_1) & 0{,}667\eta_2(v_1) + \eta_1(v_2) \end{vmatrix} = 0$$

Parametrii de încărcare axială sînt:

$$v_2 = 2\sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad v_1 = 6\sqrt{\frac{3P}{4{,}5EI}} = 2{,}449\,v_2.$$

Rezolvarea prin încercări:

— pentru $v_2 = 0{,}45$ și $v_1 = 1{,}10$, $D = 0{,}260$.
— pentru $v_2 = 0{,}48$ și $v_1 = 1{,}17$, $D = 0{,}157$,
— pentru $v_2 = 0{,}52$ și $v_1 = 1{,}27$, $D = 0{,}100$,
— pentru $v_2 = 0{,}60$ și $v_1 = 1{,}47$, $D = -0{,}056$.

Se aleg valorile: $v_{cr_2} = 0{,}57$ și $v_{cr_1} = 1{,}39$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XVIII

CALCULUL ÎN DOMENIUL ELASTO — PLASTIC

Structurile de rezistență, realizate din oțel și dimensionate pe baza rezistențelor admisibile sau stărilor limită, dispun de rezerve de rezistență. Cunoașterea acestora permite o apreciere mai corectă a soluțiilor adoptate și totodată permite realizarea de elemente de rezistență cu un consum mai redus de materiale, deci o proiectare economică.

Atingerea eforturilor de curgere în fibrele cele mai solicitate ale unei secțiuni nu înseamnă epuizarea capacității portante a acesteia, după cum nici plastificarea integrală a unei secțiuni, într-o structură static nedeterminată, nu conduce la scoaterea sa din exploatare.

Rezerva de rezistență se manifestă atît la nivelul secțiunii cît și la nivelul structurii în ansamblu și se datorește proprietăților elasto-plastice ale materialelor.

Ipotezele simplificatoare admise în calcul, în domeniul elasto-plastic, pentru structuri solicitate predominant la încovoiere, sînt:

— materialul se consideră ideal elasto-plastic, relația $\sigma - \varepsilon$ fiind de tip Prandtl (fig. XVIII 1, a),

— se admite valabilă ipoteza secțiunilor plane,

— se admite că secțiunile transversale sînt dublu simetrice,

— în situația în care momentul încovoietor dintr-o secțiune a atins valoarea momentului plastic, M_p, se consideră că în secțiunea respectivă a apărut o articulație plastică,

— articulația plastică este punctuală și se dezvoltă într-un singur sens (fig. XVIII.1, b),

— materialul este suficient de ductil, astfel încît permite rotirea în articulația plastică, pînă la atingerea capacității portante de către structură,

— valoarea momentului plastic nu este influențată de forța axială sau forța tăietoare,

— deformațiile sînt mici și în consecință ecuațiile de echilibru static se exprimă în raport cu poziția nedeformată,

Scanned with OKEN Scanner

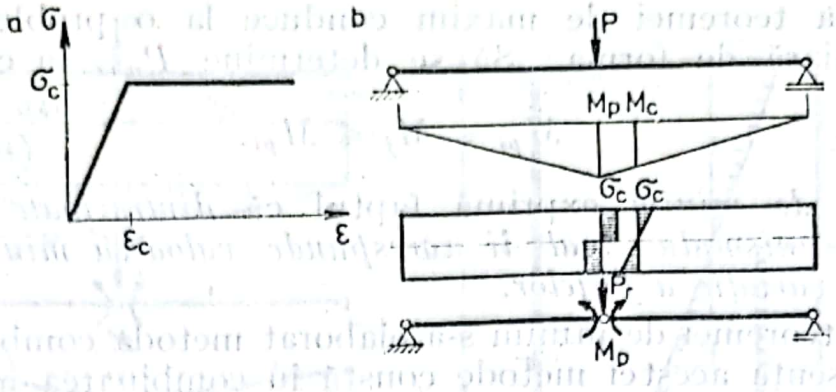


Fig. XVIII.1

— forţele se consideră active şi cresc funcţie de un singur parametru,

— fenomenul de pierdere a stabilităţii locale sau generale nu are loc înainte de producerea mecanismului de cedare plastică.

Rezerva de rezistenţă a secţiunii este reprezentată de raportul

$$\nu = \frac{M_p}{M_c} = \frac{\sigma_c W_p}{\sigma_c W_{e1}} = \frac{W_p}{W_{e1}}.$$

Rezerva de rezistenţă a structurii static nedeterminate este reprezentată de raportul dintre forţa de rupere P_r şi forţa care produce apariţia primei articulaţii plastice, $c_r = \dfrac{P_r}{P_1}$.

Situaţia de echilibru limită se poate caracteriza prin următoarele trei condiţii:

— condiţia de echilibru static,

— condiţia de mecanism, $\sum P_i \eta_i - \sum M_{pk} \theta_k = 0$,

— condiţia de plasticitate, $-M_p \leqslant M \leqslant M_p$.

Problemele calculului în domeniul elasto-plastic sînt:

— calculul direct al forţei de rupere,

— calculul biografic.

Calculul forţei de rupere se realizează pe baza a două teoreme: teorema de maxim şi teorema de minim.

Teorema de maxim exprimă faptul că *dintre toate diagramele static admisibile, diagramei reale îi corespunde valoarea maximă a parametrului de variaţie a forţelor.*

Prin diagramă static admisibilă se înţelege diagrama care respectă condiţia de echilibru static şi condiţia de plasticitate.

Scanned with OKEN Scanner

Utilizarea teoremei de maxim conduce la o problemă de programare liniară de forma: Să se determine P_{max} în condițiile

$$-M_{pj} \leqslant M_j \leqslant M_{pj}.$$

Teorema de minim exprimă faptul că *dintre toate mecanismele posibile, mecanismului real îi corespunde valoarea minimă a parametrului de variație a forțelor.*

Pe baza teoremei de minim s-a elaborat metoda combinării mecanismelor. Esența acestei metode constă în combinarea mecanismelor simple, posibile pentru o anumită ipoteză de încărcare. Mecanismele simple sînt: mecanismul de bară, mecanismul de etaj și mecanismul de nod.

Evaluînd valoarea parametrului de variație a forțelor, pentru toate combinațiile posibile, se adoptă ca valoare a situației de rupere valoarea minimă a parametrului.

Calculul biografic permite urmărirea evoluției structurii în domeniul elastic, în domeniul elasto-plastic pînă la rupere. În timpul creșterii parametrului de variație a forțelor, se determină valoarea acestuia corespunzătoare apariției fiecărei articulații plastice, deplasările maxime din aceste situații de încărcare și rotirile din articulațiile plastice anterior formate.

Aplicațiile ce urmează reprezintă cazuri simple care pot fi rezolvate manual. În cazul structurilor a căror rezolvare necesită utilizarea unui calculator electronic de mare capacitate, se procedează așa cum se va arăta în capitolul XIX, cu condiția ca pe măsură ce apar articulațiile plastice acestea să fie inserate în structură, iar matricele de rigiditate a elementelor respective și a structurii să fie modificate. De asemenea, vectorul forțelor exterioare se modifică prin introducerea momentelor plastice din secțiunile corespunzătoare. Calculul biografic se efectuează prin metoda pas cu pas, forțele variind cu pași constanți sau variabili.

APLICAȚII

Problema 18.1. Pentru grinda din figura 18.1, se cere să se determine rezerva de rezistență a celei mai solicitate secțiuni transversale, în raport cu situația atingerii momentului de curgere. Se dau: $\sigma_c = 2400$ daN/cm², $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ daN/cm² și $l = 6$ m.

Scanned with OKEN Scanner

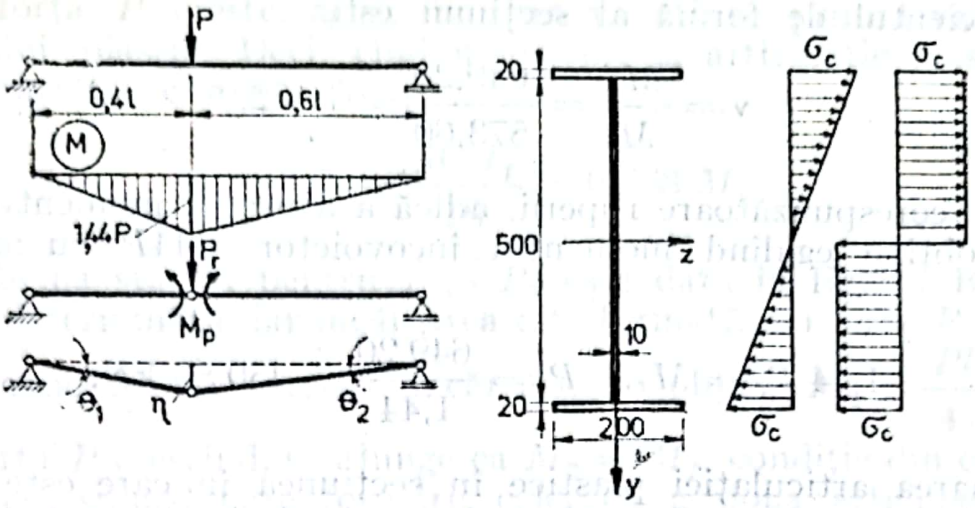


Fig. 18.1

Pentru a stabili rezerva de rezistență a secțiunii, și deci a grinzii static determinate, este necesar să se calculeze momentul de curgere și momentul plastic. Coeficientul de formă al secțiunii este

$$\nu = \frac{M_p}{M_c},$$

unde:

$$M_c = \sigma_c W_{e1}, \quad W_{e1} = I_z/y_{max}, \quad M_p = \sigma_c W_p, \quad W_p = S_i + S_c,$$

$$I_z = 2\left(\frac{20 \cdot 2^3}{12} + 20 \cdot 2 \cdot 26^3\right) + \frac{1 \cdot 50^3}{12} = 64523 \text{ cm}^4,$$

$$W_{e1} = \frac{64523}{27} = 2390 \text{ cm}^2,$$

$$M_c = 2400 \cdot 2390 = 5736000 \text{ daNcm} = 573{,}6 \text{ kNm}.$$

Forța P_c corespunzătoare acestei situații este

$$P_c = \frac{M_c}{1{,}44} = 398{,}33 \text{ kN}.$$

S_i și S_c reprezintă momentul static al unei jumătăți din suprafața secțiunii transversale, întinsă sau comprimată, în raport cu axa neutră

$$S_i = S_c = 2 \cdot 20 \cdot 26 + 1 \cdot 25 \cdot 12{,}5 = 1352{,}5 \text{ cm}^3.$$

$$M_p = \sigma_c(S_i + S_c) = 2400 \cdot 2705 = 6492000 \text{ daNcm} = 649{,}2 \text{ kNm}$$

Scanned with OKEN Scanner

Coeficientul de formă al secțiunii este

$$\nu = \frac{M_p}{M_c} = \frac{649{,}20}{573{,}60} = 1{,}132.$$

Forța corespunzătoare ruperii, adică a atingerii momentului plastic, se obține egalînd momentul încovoietor $1{,}44P$ cu momentul plastic,

$$1{,}44\,P_r = M_p, \quad P_r = \frac{649{,}20}{1{,}44} = 450{,}83 \text{ kN}.$$

Formarea articulației plastice în secțiunea în care este aplicată forță concentrată transformă grinda static determinată într-un mecanism. Scriind echilibrul acestui mecanism, prin utilizarea condiției de mecanism, se obține

$$P_r\eta = M_p\theta_1 + M_p\theta_2,$$

unde

$$\eta = 2{,}4\theta_1 \quad \text{și} \quad \theta_2 = \frac{2}{3}\theta_1,$$

deci

$$P_r = 0{,}694\,M_p = 450{,}83 \text{ kN}.$$

În acest caz rezerva de rezistență a secțiunii se determină și cu raportul $\frac{P_r}{P_c}$,

$$\frac{P_r}{P_c} = \frac{450{,}83}{398{,}33} = 1{,}132.$$

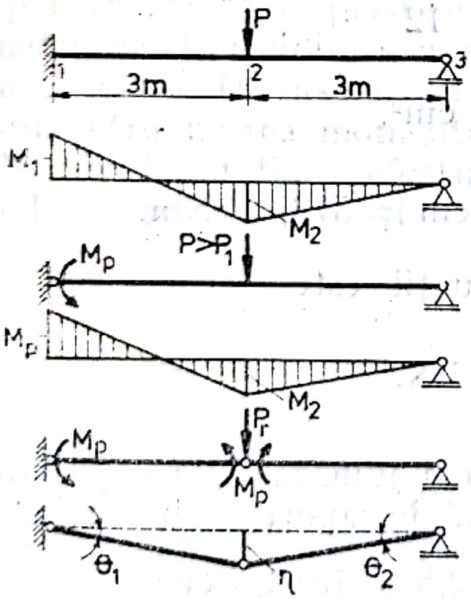


Fig. 18.2

Problema 18.2. Pentru grinda din figura 18,2, să se determine forța de rupere și rezerva de rezistență, cunoscînd momentul plastic al secțiunii transversale, M_p.

Din calculul elastic se cunoaște că $M_1 = \frac{3Pl}{16} = \frac{18P}{16}$ și $M_2 = \frac{5Pl}{32} = \frac{15P}{16}$.

Deoarece momentul încovoietor M_1 este mai mare în valoare absolută, rezultă că

dacă forța P crește, acest moment va atinge primul valoarea momentului plastic. Deci, cînd apare prima articulație plastică, forța corespunzătoare are valoarea

$$P_1 = \frac{16M_p}{18} = 0{,}888\ M_p.$$

Schema statică pentru $P > P_1$ este dată în figură. Bara devine static determinată, iar încărcarea este formată din forța P și momentul plastic M_p. Cu aceste încărcări, se obține $M_2 = \frac{Pl}{4} - \frac{M_p}{2}$.

Forța P crescînd, se ajunge ca $M_2 = M_p$, condiție din care rezultă forța corespunzătoare formării celei de a doua articulații plastice,

$$M_p = \frac{P_2 l}{4} - \frac{M_p}{2}, \quad P_2 = \frac{6M_p}{l} = M_p.$$

Forța P_2 reprezintă forța de rupere, deoarece la această valoare grinda s-a transformat într-un mecanism, $P_r = P_2$.

Rezerva de rezistență a grinzii este dată de raportul între forța de rupere și forța corespunzătoare apariției primei articulații plastice,

$$c_r = \frac{P_r}{P_1} = \frac{M_p}{0{,}888\ M_p} = 1{,}125.$$

Valoarea forței de rupere se poate determina și din condiția de mecanism,

$$P_r \eta = 2M_p \theta_1 + M_p \theta_1,$$

unde $\eta = 3\ \theta_1$ și $\theta_2 = \theta_1$. Rezultă, în cele din urmă, $P_r = M_p$.

Problema 18.3. Să se determine rezerva de rezistență a structurii din figura 18.3. Se dau: $I_1 = 1{,}225\ I$, $I_2 = 1{,}414\ I$, $I_3 = I$.

Rezolvînd prin metoda forțelor, se obține ecuația

$$121{,}11\ X_1 + 31{,}285\ P = 0,$$

de unde $X_1 = -0{,}258\ P$, valoare cu care s-a construit diagrama M.

Deoarece momentul încovoietor M_2 va atinge valoarea M_p, pentru forța $P_1 = 0{,}968\ M_p$, în această secțiune se va forma prima articulație plastică.

Încărcînd în continuare structura cu $P > P_1$ și cu M_p, în secțiunea 2, se obține diagrama de moment încovoietor din care se de-

Scanned with OKEN Scanner

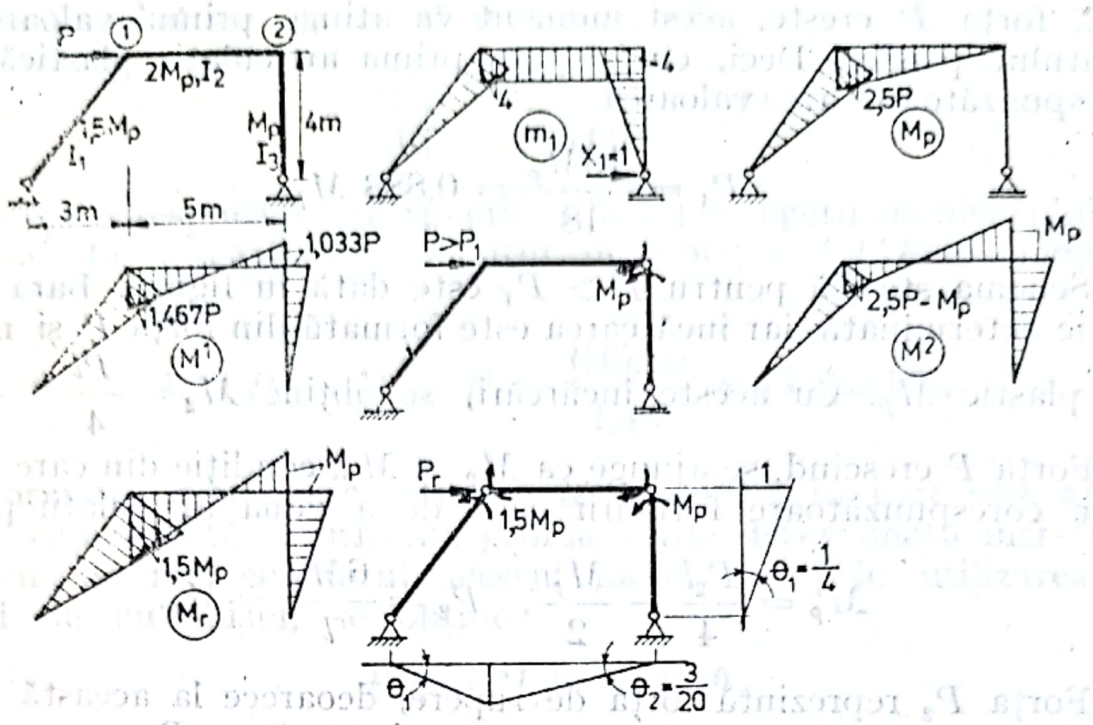


Fig. 18.3

termină valoarea P_2, corespunzătoare apariției celei de a doua articulații plastice. Scriind egalitatea $M_1 = 1{,}5\,M_p$, deoarece se va plastifica mai repede stîlpul decît rigla, rezultă

$$2{,}5\,P_2 - M_p = 1{,}5\,M_p \quad \text{și} \quad P_2 = M_p, \quad \text{iar} \quad P_2 = P_r.$$

Rezerva de rezistență a structurii este

$$c_r = \frac{1}{0{,}968} = 1{,}033.$$

Scriind condiția de mecanism, în situația premergătoare ruperii, se obține

$$P_r \cdot 1 = 1{,}5\,M_p\theta_1 + M_p\theta_1 + 1{,}5\,M_p\theta_2 + M_p\theta_2,$$

iar apoi

$$P_r = M_p.$$

Problema 18.4. Să se determine forța de rupere pentru grinda continuă din figura 18.4, utilizînd teorema de maxim. Grinda are secțiunea constantă, iar momentul plastic este M_p.

Pentru rezolvare se utilizează metoda Simplex în interpretare geometrică. Problema primește forma: Să se determine P_{max} în condițiile

$$-M_p \leqslant M_p^0 + X_1 m_1 \leqslant M_p.$$

Scanned with OKEN Scanner

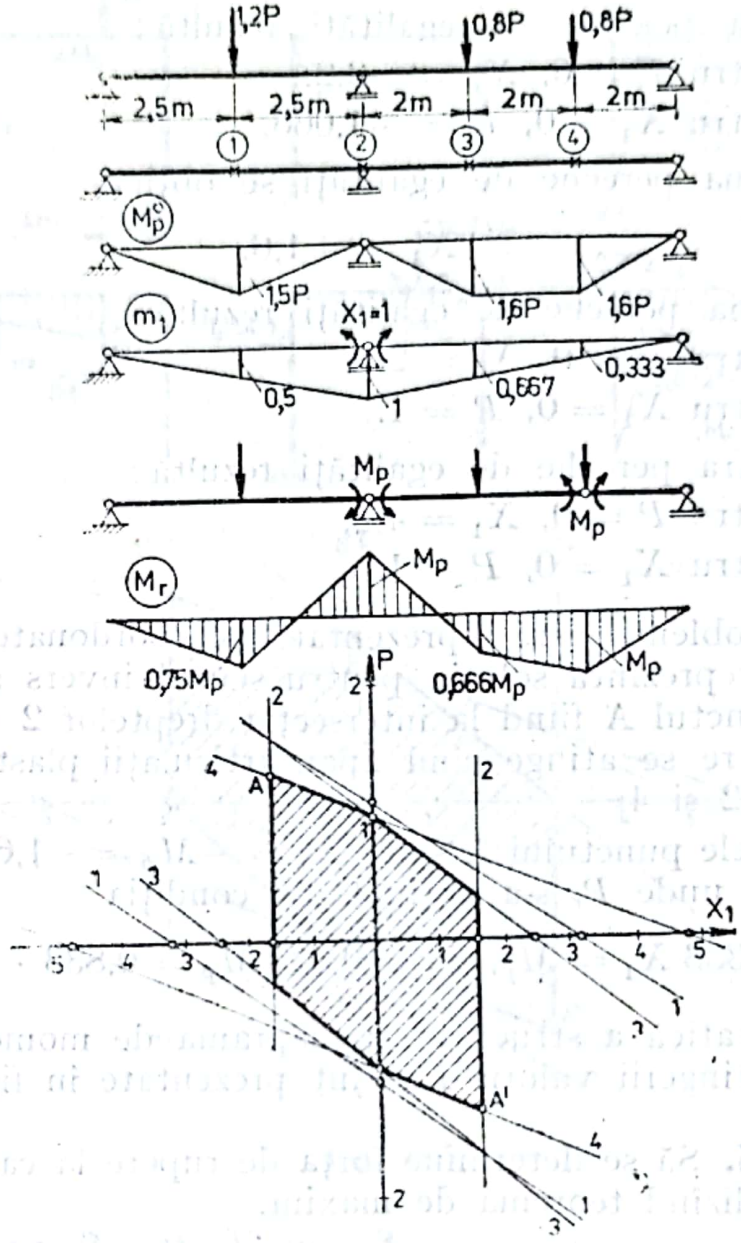


Fig. 18.4

Se scrie condiția în cele patru puncte caracteristice și rezultă:

1. — $M_p \leqslant 1{,}5\ P + 0{,}5\ X_1 \leqslant M_p$,
2. — $M_p \leqslant X_1 \leqslant M_p$,
3. — $M_p \leqslant 1{,}6\ P + 0{,}667\ X_1 \leqslant M_p$,
4. — $M_p \leqslant 1{,}6\ P + 0{,}333\ X_1 \leqslant M_p$.

Utilizînd cele 8 egalități se obțin 8 drepte, două cîte două paralele. Pentru reprezentare se alege $M_p = 1{,}6$ (valoare arbitrară). Dreptele se reprezintă utilizînd ecuația dreptei prin tăieturi.

Scanned with OKEN Scanner

Din prima pereche de egalităţi rezultă:

— pentru $P = 0$, $X_1 = \pm 3{,}2$,

— pentru $X_1 = 0$, $P = \pm 1{,}066$.

Din a doua pereche de egalităţi se obţine,

$$X_1 = \pm 1{,}6.$$

Din a treia pereche de egalităţi rezultă:

— pentru $P = 0$, $X_1 = 2{,}4$,

— pentru $X_1 = 0$, $P = 1$.

Din a patra pereche de egalităţi rezultă:

— pentru $P = 0$, $X_1 = 4{,}8$,

— pentru $X_1 = 0$, $P = 1$.

Soluţia problemei este reprezentată de coordonatele punctului A (punctul A' reprezintă soluţia pentru sensul invers al forţelor). De asemenea, punctul A fiind la intersecţia dreptelor 2 şi 4, rezultă că forţa de rupere se atinge cînd apar articulaţii plastice în punctele caracteristice 2 şi 4.

Coordonatele punctului A sînt: $X_1 = -M_p = -1{,}6$ şi $P_r = 0{,}833 \cdot M_p = 1{,}333$, unde P_r s-a obţinut din condiţia

$$1{,}6\,P + 0{,}333\,X_1 = M_p,\quad P_r = 0{,}833\,M_p = 0{,}833 \cdot 1{,}6 = 1{,}333.$$

Schema statică a structurii şi diagrama de moment încovoietor, în situaţia atingerii valorii P_r, sînt prezentate în figura 18.4.

Problema 18.5. Să se determine forţa de rupere la cadrul din figura 18.5, utilizînd teorema de maxim.

Se consideră $M_p = 15$ kNm.

Inegalităţile, scrise în cele patru puncte caracteristice, sînt:

1. $-M_p \leqslant 3P + 3\,X_1 \leqslant M_p$
2. $-M_p \leqslant 3P + 5\,X_1 \leqslant M_p$
3. $-2M_p \leqslant 6{,}6\,P + 5\,X_1 \leqslant 2M_p$
4. $-M_p \leqslant 5\,X_1 \leqslant M_p$.

Din inegalităţile de mai sus, transformate în egalităţi, rezultă:

1. — pentru $P = 0$, $X_1 = \pm 5$

— pentru $X_1 = 0$, $P = \pm 5$

Scanned with OKEN Scanner

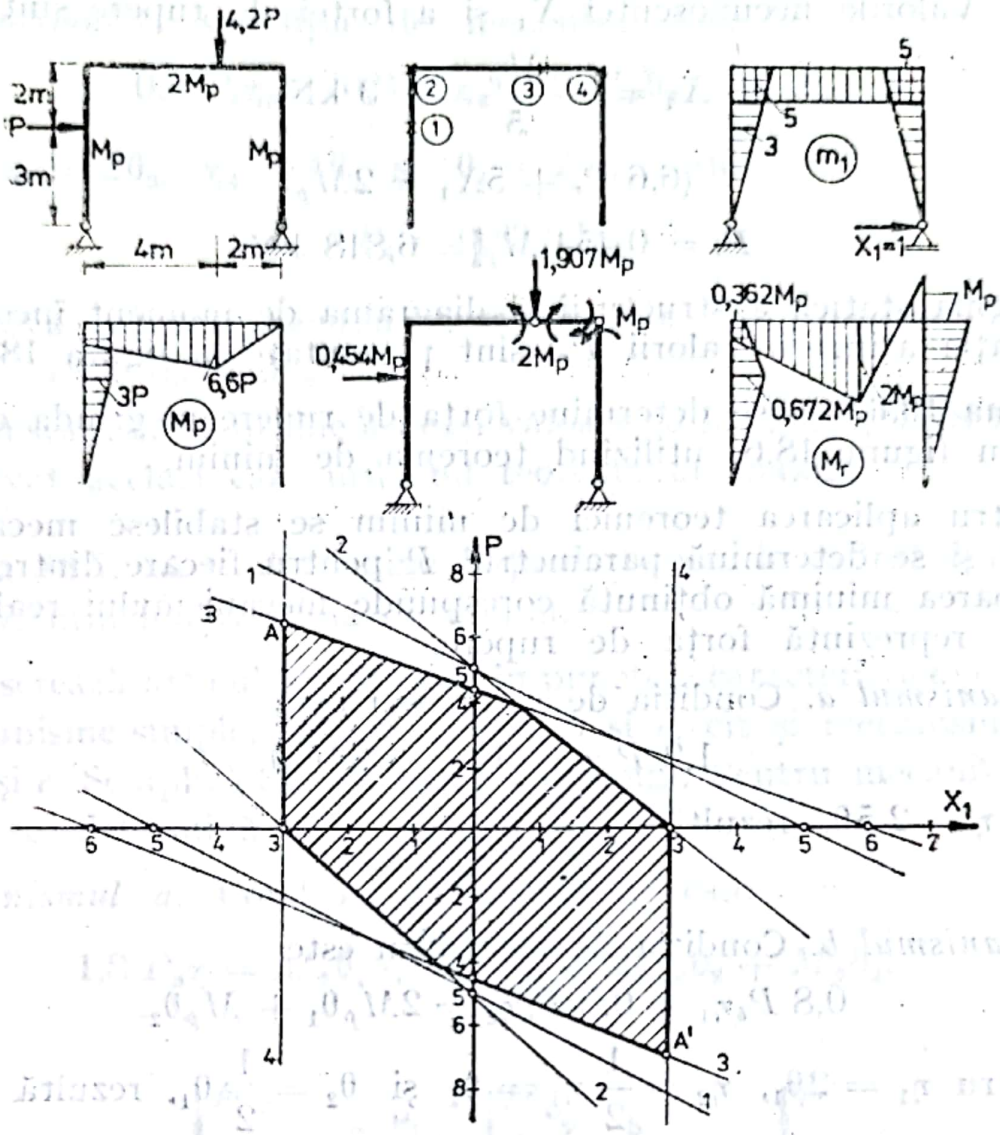


Fig. 18.5

2. — pentru $P = 0$, $X_1 = \pm 3$
   — pentru $X_1 = 0$, $P = \pm 5$
3. — pentru $P = 0$, $X_1 = \pm 6$
   — pentru $X_1 = 0$, $P = \pm 4{,}54$
4. — $X_1 = \pm 3$.

Aceste perechi de drepte închid suprafața hașurată, care reprezintă domeniul soluțiilor posibile.

Punctul A, care reprezintă soluția problemei, arată că ruperea are loc prin apariția articulațiilor plastice în punctele caracteristice

Scanned with OKEN Scanner

3 și 4. Valorile necunoscutei X_1 și a forței de rupere sînt:

$$X_1 = -\frac{M_p}{5} = -3 \text{ kN},$$

$$(6{,}6\, P_r + 5X_1 = 2M_p)$$

$$P_r = 0{,}454\, M_p = 6{,}818 \text{ kN}.$$

Schema statică a structurii și diagrama de moment încovoietor, în situația atingerii valorii P_r, sînt prezentate în figura 18.5.

Problema 18.6. Să se determine forța de rupere la grinda continuă din figura 18.6, utilizînd teorema de minim.

Pentru aplicarea teoremei de minim se stabilesc mecanismele posibile și se determină parametrul P pentru fiecare dintre ele.

Valoarea minimă obținută corespunde mecanismului real de rupere și reprezintă forța de rupere.

Mecanismul a. Condiția de mecanism este

$$1{,}2\, P_a \eta = M_p \theta + 2M_p \theta.$$

Pentru $\eta = 2{,}5\theta$, rezultă

$$P_a = M_p.$$

Mecanismul b. Condiția de mecanism este

$$0{,}8\, P_b \eta_1 + 0{,}8\, P_b \eta_2 = 2M_p \theta_1 + M_p \theta_2.$$

Pentru $\eta_1 = 2\theta_1$, $\eta_2 = \frac{1}{2}\eta_1 = \theta_1$ și $\theta_2 = \frac{1}{2}\theta_1$, rezultă

$$P_b = 1{,}0416\, M_p.$$

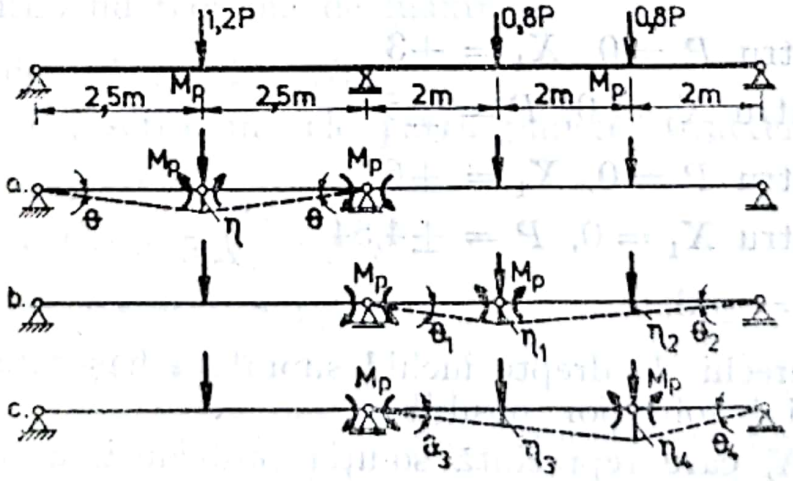


Fig. 18.6

Mecanismul c. Condiția de mecanism este

$$0{,}8\,P_c\eta_3 + 0{,}8\,P_c\eta_4 = 2\,M_p\theta_3 + M_p\theta_4.$$

Pentru $\eta_3 = 2\theta_3$, $\eta_4 = 4\theta_3$ și $\theta_4 = 2\theta_3$, rezultă

$$P_c = 0{,}833\,M_p.$$

Valoarea obținută pentru mecanismul *c* este valoarea minimă, deci $P_r = P_c = 0{,}833\,M_p$.

Se constată că se obține aceeași valoare ca la aplicația 18.4, unde s-a rezolvat același caz, utilizînd teorema de maxim.

Problema 18.7. Să se determine forța de rupere la cadrul din figura 18.7, utilizînd teorema de minim.

Se inserează articulații plastice în punctele caracteristice, obținînd atît mecanisme simple, mecanismele *a*, *b* și *c*, cît și mecanisme complete, *d* și *e*. Se aplică apoi teorema de minim. Pentru mecanismul de rupere, se determină și diagrama M_r.

Mecanismul a. Condiția de mecanism este

$$1{,}8\,P_a\eta = M_p\theta_1 + 2M_p\theta_1 + 2M_p\theta_2 + M_p\theta_2.$$

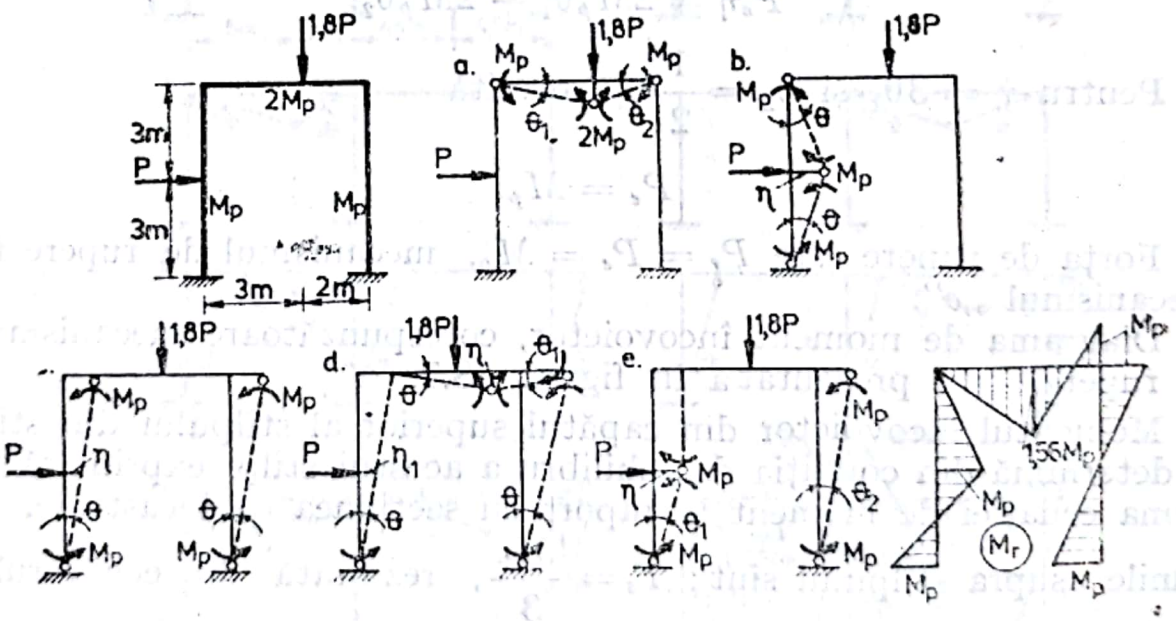


Fig. 18.7

Pentru $\eta = 3\theta_1$ și $\theta_2 = 1{,}5\theta_1$, rezultă

$$P_a = 1{,}389\, M_p.$$

Mecanismul b. Condiția de mecanism este

$$P_b\eta = 2M_p\theta + 2M_p\theta.$$

Pentru $\eta = 3\theta$, rezultă

$$P_b = 1{,}333\, M_p.$$

Mecanismul c. Condiția de mecanism este

$$P_c\eta = 4M_p\theta.$$

Pentru $\eta = 3\theta$ rezultă

$$P_c = 1{,}333\, M_p,$$

deci aceeași valoare ca și pentru mecanismul *b*.

Mecanismul d. Condiția de mecanism este

$$P_d\eta_1 + 1{,}8\, P_d\eta = M_p\theta + 2M_p\theta + 2M_p\theta_1 + M_p\theta_1 + 2M_p\theta.$$

Pentru $\eta_1 = 3\theta$, $\eta = 3\theta$ și $\theta_1 = 1{,}5\theta$, rezultă

$$P_d = 1{,}131\, M_p.$$

Mecanismul e. Condiția de mecanism este

$$P_e\eta = 2M_p\theta_1 + 2M_p\theta_2.$$

Pentru $\eta = 3\theta_1$ și $\theta_2 = \frac{1}{2}\theta_1$, rezultă

$$P_e = M_p.$$

Forța de rupere este $P_r = P_e = M_p$, mecanismul de rupere fiind mecanismul „*e*".

Diagrama de moment încovoietor, corespunzătoare mecanismului de rupere, este prezentată în figura 18.7.

Momentul încovoietor din capătul superior al stîlpului din stînga se determină din condiția de echilibru a acestui stîlp, exprimată sub forma ecuației de moment în raport cu secțiunea de încastrare. Acțiunile asupra stîlpului sînt: $T_s = \frac{M_p}{3}$, rezultată din echilibrul pe orizontală, P_r și M_p din încastrare. Rezultă $M_s = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Momentul încovoietor din secţiunea de pe riglă, în care este aplicată forţa concentrată, se determină în acelaşi mod şi anume, se consideră rigla, grindă simplu rezemată, încărcată cu 1,8 P_r şi M_p, de unde rezultă

$$V \cdot 5 - 1{,}8 M_p \cdot 2 + M_p = 0, \qquad V = 0{,}520\, M_p$$

şi apoi

$$M_i = 3V = 1{,}56\, M_p,$$

unde V este reacţiunea din capătul din stînga.

Problema 18.8. Să se determine forţa de rupere la cadrul din figura 18.8, utilizînd metoda combinării mecanismelor.

Mecanismele *a*, *b* şi *c* sînt mecanisme simple. Lor li se poate alătura mecanismul de nod, din nodul central format din trei bare, pentru realizarea combinărilor eficiente.

Mecanismul a. Condiţia de mecanism este

$$P_a \cdot 6\theta = 2M_p\theta + 2 \cdot 2M_p\theta + 2M_p\theta,$$

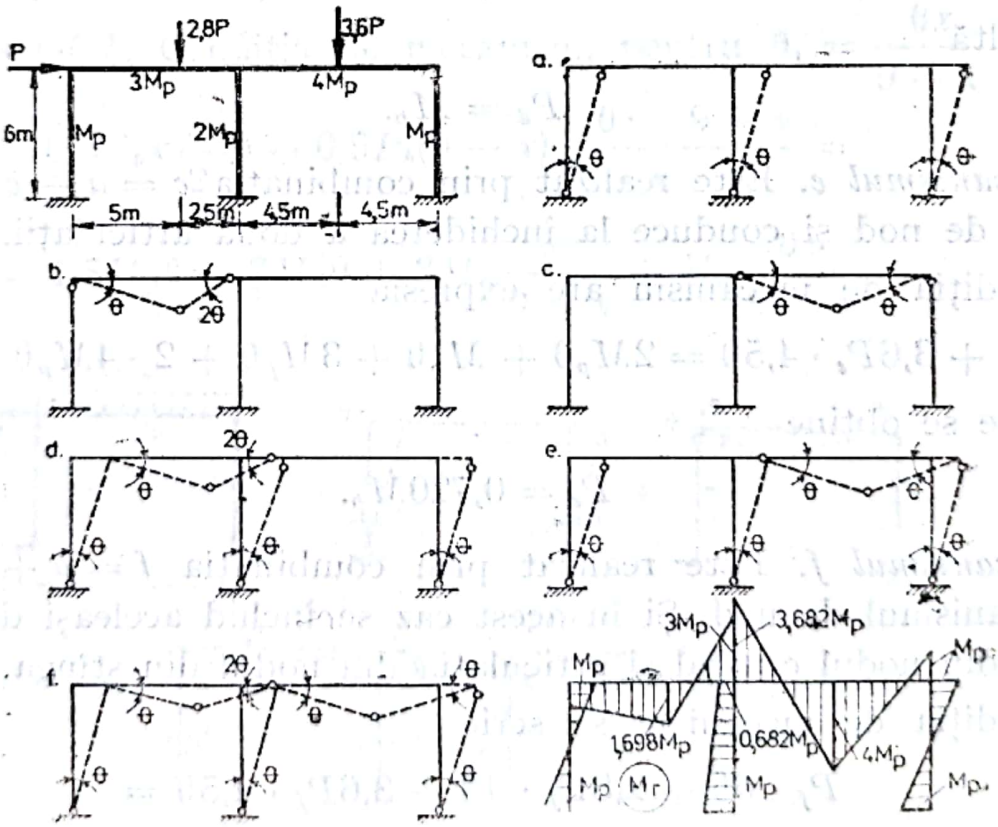


Fig. 18.8

de unde rezultă

$$P_a = 1{,}33M_p.$$

Mecanismul b. Condiția de mecanism este

$$2{,}8P_b \cdot 5\theta = M_p\theta + 3M_p\theta + 2 \cdot 3M_p \cdot 2\theta,$$

iar apoi

$$P_b = 1{,}143M_p.$$

Mecanismul c. Condiția de mecanism se scrie

$$3{,}6P_c \cdot 4{,}5\theta = 2 \cdot 4M_p\theta + 4M_p\theta + M_p\theta$$

și se obține

$$P_c = 0{,}802M_p.$$

Mecanismul d. Este realizat prin combinația $d = a + b$. Se realizează închiderea articulației din nodul din stînga.

Condiția de mecanism este

$$P_d \cdot 6\theta + 2{,}8P_d \cdot 5\theta = M_p\theta + 3M_p\theta + 2 \cdot 3M_p \cdot 2\theta + 2M_p\theta + 2M_p\theta$$

și rezultă

$$P_d = M_p.$$

Mecanismul e. Este realizat prin combinația $e = a + c +$ mecanismul de nod și conduce la închiderea a două articulații.

Condiția de mecanism are expresia

$$P_e \cdot 6\theta + 3{,}6P_e \cdot 4{,}5\theta = 2M_p\theta + M_p\theta + 3M_p\theta + 2 \cdot 4M_p\theta + 2M_p\theta,$$

de unde se obține

$$P_e = 0{,}720M_p.$$

Mecanismul f. Este realizat prin combinația $f = a + b + c +$ + mecanismul de nod. Și în acest caz se închid aceleași două articulații din nodul central și articulația din nodul din stînga.

Condiția de mecanism se scrie

$$P_f \cdot 6\theta + 2{,}8P_f \cdot 4\theta + 3{,}6P_f \cdot 4{,}5\theta =$$

$$= M_p\theta + 2 \cdot 3M_p \cdot 2\theta + 3M_p\theta + M_p\theta + 2 \cdot 4\,M_p\theta + 2M_p\theta,$$

Scanned with OKEN Scanner

iar apoi

$$P_f = 0{,}828 M_p.$$

Rezultă că parametrul minim este $P_e = 0{,}720\, M_p$ și că pentru această valoare se obține forța de rupere.

Diagrama de moment încovoietor corespunzătoare ruperii este dată direct în figura 18.8.

Problema 18.9. Să se determine forța de rupere la cadrul din figura 18.9, utilizînd metoda combinării mecanismelor.

Structura fiind încărcată cu forță uniform distribuită, nu se mai cunoaște poziția articulației plastice de pe riglă, în cîmp. Pentru calcul se presupune că această articulație se află la distanța x de capătul din stînga. Poziția ei se determină din condiția ca forța de rupere să reprezinte un extrem.

Mecanismul a. Condiția de mecanism este

$$P_a \cdot 6\theta = 2 \cdot 1{,}5 M_p \theta + M_p \theta$$

și rezultă

$$P_a = \frac{2}{3} M_p.$$

Mecanismul b. Condiția de mecanism, pentru $\theta_1 = \dfrac{\theta x}{9 - x}$, este

$$0{,}5 P_b x \frac{x}{2} \theta + 0{,}5 P_b (9 - x) \frac{\theta x}{9 - x} \frac{9 - x}{2} =$$

$$= 1{,}5 M_p \theta + 3 M_p \theta + 3 M_p \frac{\theta x}{9 - x} + M_p \frac{\theta x}{9 - x},$$

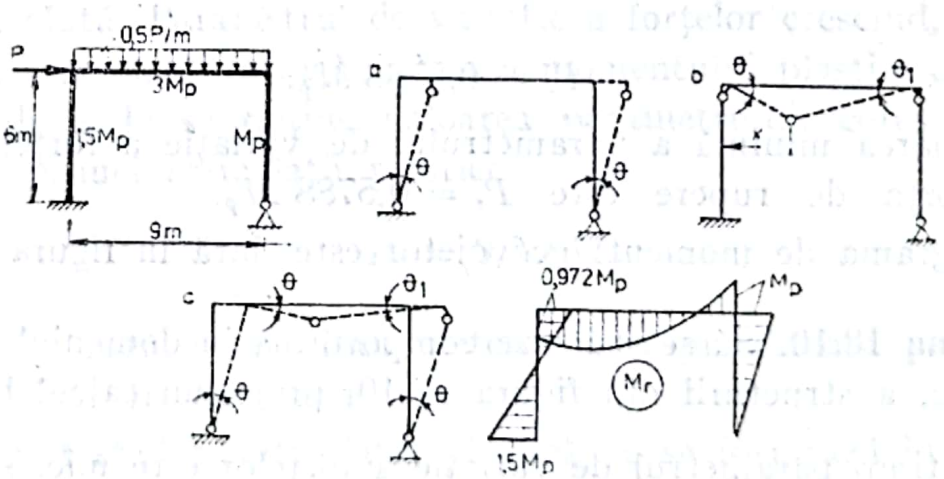


Fig. 18.9

Scanned with OKEN Scanner

de unde se obține

$$P_b \frac{9x}{4} = \frac{91 - x}{2(9 - x)} M_p \quad \text{sau} \quad P_b = \frac{4(91 - x)}{18(9 - x)} M_p.$$

Impunînd condiția ca P_b să reprezinte un minim $\left(\frac{\partial P}{\partial x} = 0\right)$, se obține valoarea lui x, deci poziția articulației plastice și ulterior valoarea parametrului P_b.

Din condiția $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$, rezultă ecuația $x^2 - 182x + 819 = 0$, care are rădăcinile $x_1 = 4{,}687$ și $x_2 = 177{,}38$. Dintre aceste valori numai prima interesează. Parametrul P_b primește valoarea $P_b = 0{,}949 M_p$.

Mecanismul c. Este realizat prin combinarea mecanismelor simple *a* și *b*. Condiția de mecanism este

$$P_c \cdot 6\theta + P_c \frac{9x}{4}\theta = 1{,}5 M_p\theta + 3M_p\theta + 3M_p \frac{\theta x}{9 - x} + M_p \frac{\theta x}{9 - x} + M_p\theta,$$

de unde rezultă

$$P_c(6 + 2{,}25x) = \frac{49{,}5 - 1{,}5x}{9 - x} M_p \quad \text{sau} \quad P_c = \frac{49{,}5 - 1{,}5x}{(6 + 2{,}25x)(9 - x)} M_p.$$

Din condiția de extrem, $\frac{\partial P_c}{\partial x} = 0$, se calculează $x = 3{,}740$ m și apoi

$$P_c = 0{,}5788\, M_p.$$

Valoarea minimă a parametrului de variație a forțelor este P_c, deci forța de rupere este $P_r = 0{,}5788\, M_p$.

Diagrama de moment încovoietor este dată în figura 18.9.

Problema 18.10. Să se studieze comportarea în domeniul elasto-plastic, a structurii din figura 18.10, printr-un calcul biografic.

Cît timp parametrul de variație a forțelor este mic, structura se află în domeniul elastic de comportare.

Scanned with OKEN Scanner

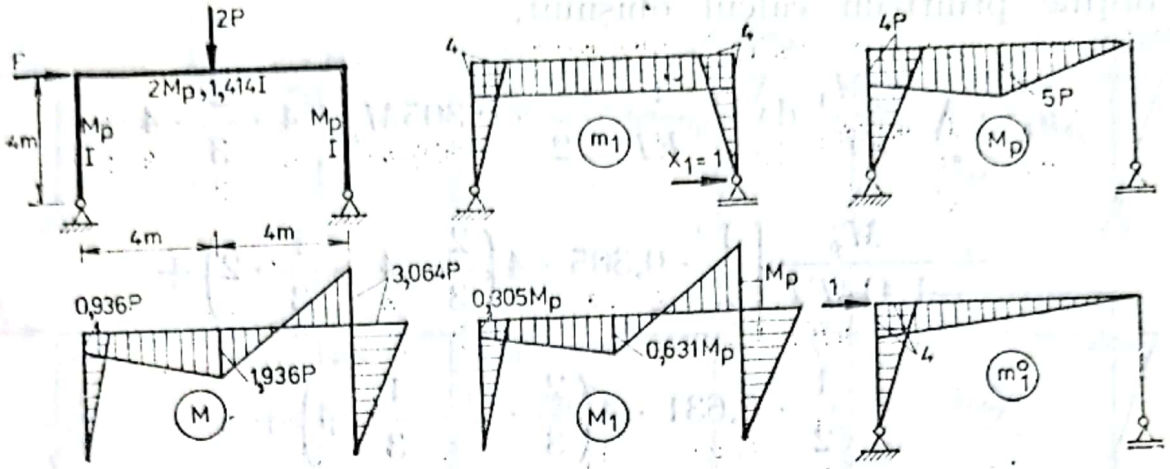


Fig. 18.10

Pentru calculul elastic, ținînd seama că structura este o singură dată static nedeterminată, s-au trasat diagramele m_1 și M_p pe sistemul de bază.

Ecuația de condiție este

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0,$$

unde, cu datele problemei, $\delta_{11} = \frac{131,19}{EI}$, $\Delta_{1p} = \frac{100,5P}{EI}$, iar necunoscuta are valoarea $X_1 = -0,766P$.

Cu această valoare s-a trasat diagrama M. Se constată că momentul încovoietor avînd mărimea $3,064\,P$ este cel mai mare în valoare absolută. Parametrul de variație a forțelor crescînd, se ajunge ca acest moment să atingă valoarea momentului plastic, $3,064\,P_1 = M_p$, de unde se obține valoarea parametrului, corespunzătoare formării primei articulații plastice

$$P_1 = 0,326M_p.$$

Valorile momentelor încovoietoare corespunzătoare parametrului P_1 sînt date în diagrama M_1.

În acest stadiu, articulația plastică ce se formează în nodul din dreapta nu a început să se dezvolte. Deplasarea la nivelul riglei, u_1,

Scanned with OKEN Scanner

se obține printr-un calcul obișnuit,

$$u_1 = \int \frac{m_1^0 M_1}{EI}\,dx = \frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot 0{,}305M_p\cdot 4\cdot\frac{2}{3}\cdot 4 +$$

$$+\frac{M_p}{1{,}414EI}\left[\frac{1}{2}\cdot 0{,}305\cdot 4\left(\frac{2}{3}\cdot 4+\frac{1}{3}\cdot 2\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\cdot 0{,}631\cdot 4\left(\frac{2}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot 4\right)+$$

$$\left.+\frac{1}{2}\cdot 0{,}631\cdot 4\cdot\frac{2}{3}\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4\cdot\frac{1}{3}\cdot 2\right]=\frac{5{,}735M_p}{EI}.$$

Pentru forțe $P \geqslant P_1$, structura devine static determinată, schema statică fiind dată în figura 18.11. Efectuînd calculul reacțiunilor, rezultă diagrama de moment încovoietor M. Urmează să se stabilească în care dintre cele două secțiuni cu moment încovoietor mare va apare a doua articulație plastică:

— secțiunea din nod,

$$4P_2' - M_p = M_p, \text{ de unde } P_2' = 0{,}5M_p,$$

— secțiunea de la mijlocul riglei,

$$5P_2'' - M_p = 2M_p, \text{ de unde } P_2'' = 0{,}6M_p.$$

Rezultă că a doua articulație plastică se formează în secțiunea din nod, deci $P_2 = 0{,}5M_p$.

Această valoare a parametrului de variație a forțelor, reprezintă forța de rupere, $P_r = P_2$.

Cu valoarea de rupere a parametrului de variație a forțelor, s-a construit diagrama M_r.

În această situație structura s-a transformat în mecanism de cedare plastică. Acest mecanism este în echilibru. Condiția de echilibru static, exprimată cu ajutorul lucrului mecanic virtual, este

$$P_r \cdot 4\theta = 2M_p\theta, \text{ de unde } P_r = 0{,}5M_p.$$

Scanned with OKEN Scanner

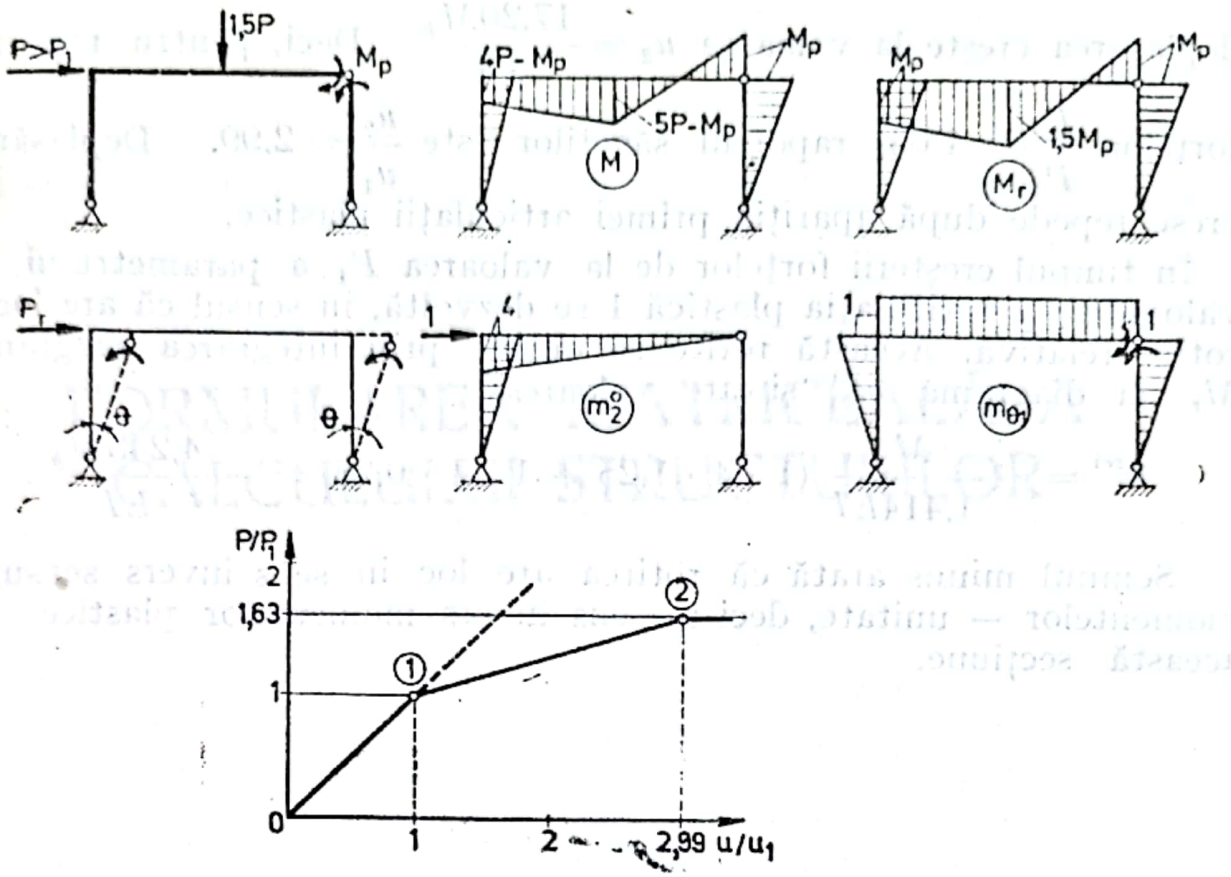


Fig. 18.11

Deplasarea pe orizontală, la nivelul riglei, în această situație, se obține prin integrarea diagramei M_r cu diagrama m_2^0 (fig. 18.11) și are valoarea

$$u_2 = \frac{1}{EI}\frac{1}{2}\cdot 4\,M_p\cdot\frac{2}{3}\cdot 4+\frac{M_p}{1{,}414EI}\left[\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4\left(\frac{2}{3}\cdot 4+\frac{1}{3}\cdot 2\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\cdot 1{,}5\cdot 4\left(\frac{2}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot 4\right)+\frac{1}{2}\cdot 1{,}5\cdot 4\cdot\frac{2}{3}\cdot 2-$$

$$\left.-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4\cdot\frac{1}{3}\cdot 2\right]=\frac{17{,}20M_p}{EI}.$$

Pentru creșterea forțelor de la valoarea $P_1=0{,}326M_p$, a parametului căreia îi corespunde deplasarea $u_1=\dfrac{5{,}735M_p}{EI}$, la valoarea $P_2=0{,}5M_p$,

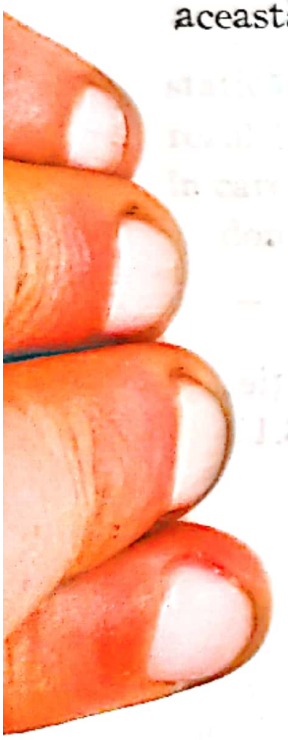
Scanned with OKEN Scanner

deplasarea crește la valoarea $u_2 = \frac{17{,}20 M_p}{EI}$. Deci, pentru raportul forțelor $\frac{P_2}{P_1} = 1{,}63$, raportul săgeților este $\frac{u_2}{u_1} = 2{,}99$. Deplasările cresc repede după apariția primei articulații plastice.

În timpul creșterii forțelor de la valoarea P_1 a parametrului, la valoarea P_2, articulația plastică 1 se dezvoltă, în sensul că are loc o rotire relativă. Această rotire se obține prin integrarea diagramei M_r cu diagrama m_{01} și are valoarea

$$\theta_1^{rel} = -\frac{M_p}{1{,}414EI}(1 \cdot 4 \cdot 1{,}25 + 1 \cdot 4 \cdot 0{,}25) = -\frac{4{,}243 M_p}{EI}.$$

Semnul minus arată că rotirea are loc în sens invers sensului momentelor — unitate, deci în sens invers momentelor plastice din această secțiune.



Scanned with OKEN Scanner

FORMULAREA MATRICEALĂ A CALCULULUI STRUCTURILOR

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XIX

FORMULAREA MATRICEALĂ A METODEI DEPLASĂRILOR

Calculul structurilor complexe necesită utilizarea unui calculator electronic de mare capacitate. În acest sens, este necesar ca metodele generale ale Staticii construcţiilor să fie transpuse în formulare matriceală. Deoarece metoda deplasărilor prezintă avantaje comparativ cu metoda forţelor, în cele ce urmează se prezintă numai formularea matriceală a metodei deplasărilor, însoţită de unele elemente specifice calculului practic şi cîteva aplicaţii simple, pentru a fixa mai bine elementele teoretice.

Rezolvarea structurilor, utilizînd formularea matriceală a metodei deplasărilor, necesită parcurgerea următoarelor etape:

— discretizarea structurii în elemente componente,

— evaluarea caracteristicilor de rigiditate ale elementelor,

— asamblarea elementelor pentru realizarea structurii, ceea ce revine la asamblarea matricelor de rigiditate ale elementelor, în matricea de rigiditate a structurii,

— alcătuirea sistemului de ecuaţii al metodei deplasărilor şi rezolvarea lui, obţinînd deplasările nodurilor,

— calculul eforturilor în secţiunile de la capetele elementelor.

În vederea parcurgerii acestor etape este necesar să se introducă unele noţiuni specifice şi anume:

— sistem de axe,

— sistem de coordonate.

Sistemul de axe este necesar pentru descrierea geometriei structurii şi a fiecărui element component, precum şi pentru reprezentarea formei deformate a structurii şi elementelor.

Sistemul de coordonate este necesar pentru reprezentarea forţelor şi deplasărilor, precum şi pentru adoptarea convenţiei de semne la aceste categorii de elemente.

Scanned with OKEN Scanner

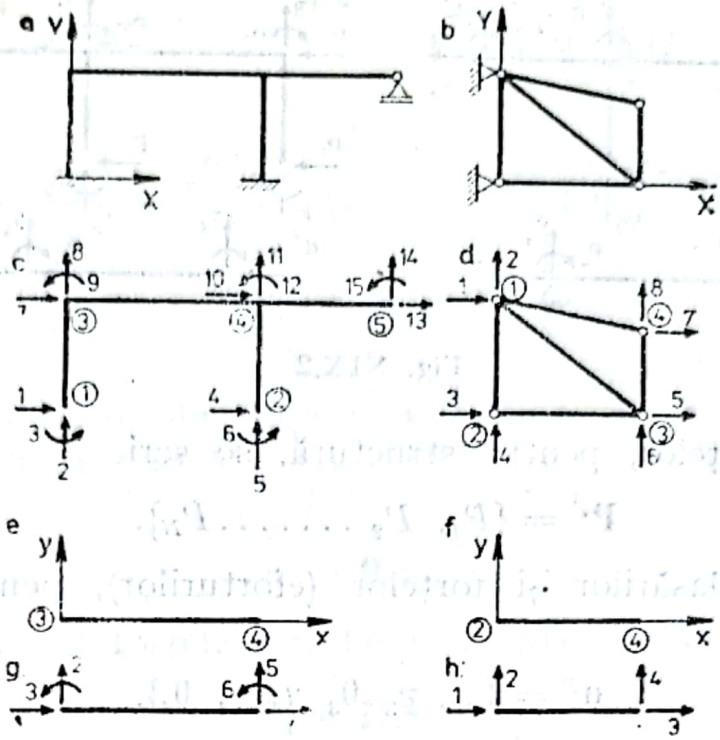


Fig. XIX.1

Sistemul de axe și sistemul de coordonate se aplică atît structurii în ansamblu, cît și elementelor componente ale structurii (fig. XIX.1). Elementul este delimitat prin două noduri consecutive.

În figura XIX.1, a, b se prezintă sistemul de axe atașat structurii în ansamblu (sistem general de axe) pentru un cadru și respectiv pentru o grindă cu zăbrele. În figura XIX.1, c, d se prezintă sistemul general de coordonate aplicat celor două structuri.

În figura XIX.1, e, f a fost reprezentat sistemul de axe atașat unui element (sistemul local de axe), iar în figura XIX.1, g, h, sistemul local de coordonate pentru o bară de cadru, cu continuitate perfectă la capete și pentru o bară dublu articulată.

Dacă sistemul de coordonate reprezintă deplasările nodurilor (fig. XIX.2, a, b), atunci ansamblul deplasărilor — pentru structură sau pentru element — formează vectorul deplasărilor.

Vectorul deplasărilor, pentru structură, are forma

$$\mathbf{U}^T = \{U_1,\ U_2 \ldots\ldots\ldots\ U_N\},$$

unde N este egal cu de trei ori numărul nodurilor, în cazul cadrelor plane, și cu de două ori numărul nodurilor, în cazul grinzilor cu zăbrele plane. În exemplul din figura XIX.2, a, $N = 3 \times 5 = 15$.

Scanned with OKEN Scanner

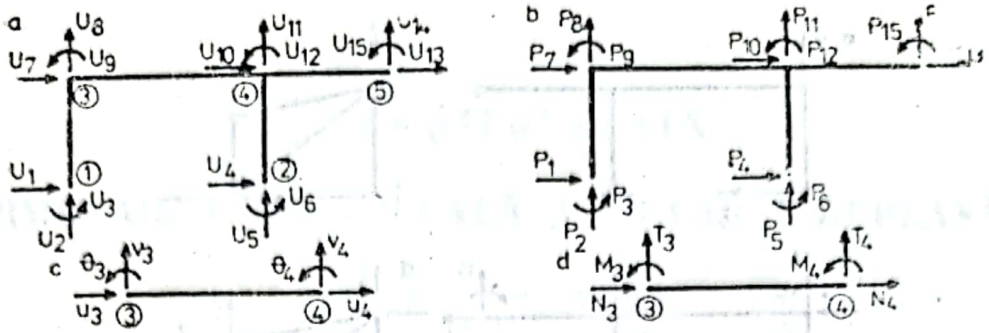


Fig. XIX.2

Vectorul forțelor, pentru structură, se scrie

$$\mathbf{P}^T = \{P_1,\ P_2\ \ldots\ldots P_N\}.$$

Vectorii deplasărilor și forțelor (eforturilor), pentru elementul 3—4, sînt:

$$\mathbf{u}^T = \{u_3,\ v_3\ \ \theta_3\ \ u_4\ \ v_4\ \ \theta_4\},$$

$$\mathbf{S}^T = \{N_3\ \ T_3\ \ M_3\ \ N_4\ \ T_4\ \ M_4\}.$$

Revenind la etapele ce se parcurg în calculul structurilor, utilizînd formularea matriceală, se precizează faptul că discretizarea structurii în elemente depinde de nevoile practice, de tipul de calcul — ordinul I, ordinul II, de stabilitate, dinamic —, de costul calculului.

Evaluarea caracteristicilor de rigiditate ale elementelor și alcătuirea matricei de rigiditate a acestora a fost tratată în detaliu în capitolul IX (volumul 1).

Asamblarea matricelor de rigiditate ale elementelor, în matricea de rigiditate a structurii, implică o serie de operații de transformare a deplasărilor și a forțelor din sistemul local în sistemul general de coordonate și invers sau transformarea deplasărilor în forțe și invers.

Aceste transformări se numesc transformări de coordonate. De exemplu, dacă $\mathbf{S}_i$, $\mathbf{u}_i$ și $\mathbf{k}_i$ sînt vectorul forțelor, vectorul deplasărilor și matricea de rigiditate a elementului i, exprimate în sistemul local de coordonate, atunci se poate scrie

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{k}_i \mathbf{u}_i. \qquad \text{(XIX.1)}$$

Dacă $\bar{\mathbf{S}}_i$, $\bar{\mathbf{u}}_i$ și $\bar{\mathbf{k}}_i$ au aceeași semnificație, dar sînt exprimate în sistemul general de coordonate, atunci se poate scrie

$$\bar{\mathbf{S}}_i = \bar{\mathbf{k}}_i \bar{\mathbf{u}}_i. \qquad \text{(XIX.2)}$$

Scanned with OKEN Scanner

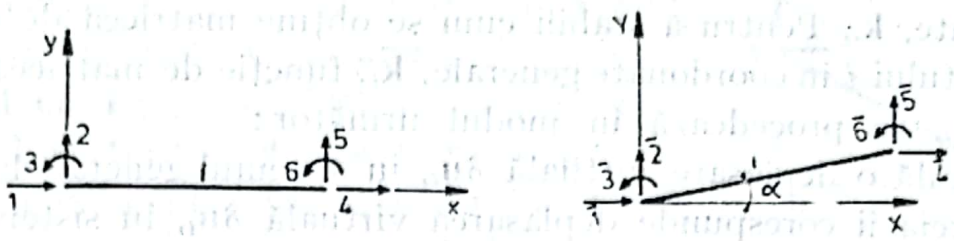


Fig. XIX.3

Dacă coordonatele din figura XIX.3, a, b (coordonate locale respectiv coordonate generale) reprezintă deplasările nodurilor, există relația

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{R}_i \bar{\mathbf{u}}_i, \tag{XIX.3}$$

iar dacă reprezintă forțele din noduri, există relația

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{R}_i \bar{\mathbf{S}}_i, \tag{XIX.4}$$

unde $\mathbf{R}_i$ este matricea de rotație, elementele sale fiind cosinușii directori ai celor două sisteme de axe.

Forma matricei de rotație pentru bara cu continuitate perfectă la capete este

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{XIX.5}$$

iar pentru bara dublu articulată este

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}. \tag{XIX.6}$$

În capitolul IX s-a prezentat forma matricei de rigiditate a elementului, cu diferite tipuri de legături la capete, în sistemul local de

Scanned with OKEN Scanner

coordonate, $\mathbf{k}_i$. Pentru a stabili cum se obține matricea de rigiditate a elementului i în coordonate generale, $\bar{\mathbf{k}}_i$, funcție de matricea de rigiditate $\mathbf{k}_i$, se procedează în modul următor:

— se dă o deplasare virtuală $\delta\bar{\mathbf{u}}_i$, în sistemul general de coordonate, căreia îi corespunde deplasarea virtuală $\delta\mathbf{u}_i$, în sistemul local,

— scriind egalitatea lucrului mecanic virtual al eforturilor, $\bar{\mathbf{S}}_i$ și $\mathbf{S}_i$, din cele două sisteme de coordonate, se obține

$$\bar{\mathbf{k}}_i = \mathbf{R}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{R}_i. \tag{XIX.7}$$

Fie $\bar{\mathbf{u}}$ vectorul deplasărilor capetelor tuturor elementelor, $\bar{\mathbf{S}}$ vectorul eforturilor de la capetele elementelor și $\bar{\mathbf{k}}$ matricea ce conține matricele de rigiditate ale tuturor elementelor. Se pot scrie expresiile:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}^T &= \{\bar{\mathbf{u}}_1,\ \bar{\mathbf{u}}_2,\ \ldots\ \bar{\mathbf{u}}_b\}, \\ \bar{\mathbf{S}}^T &= \{\bar{\mathbf{S}}_1,\ \bar{\mathbf{S}}_2\ \ldots\ \bar{\mathbf{S}}_b\}, \end{aligned} \tag{XIX.8}$$

$$\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{k}}_1 & & & \\ & \bar{\mathbf{k}}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\mathbf{k}}_b \end{bmatrix},$$

unde b este numărul elementelor (barelor) rezultate în urma operației de discretizare.

Vectorii $\bar{\mathbf{S}}$ și $\bar{\mathbf{u}}$ au cîte $6b$ elemente, pentru cadrele plane și cîte $4b$ elemente, pentru grinzile cu zăbrele plane, iar matricea $\bar{\mathbf{k}}$ este o matrice pătrată avînd $6b \times 6b$ respectiv $4b \times 4b$ elemente.

Pentru a trece la structură este necesar să se stabilească relații de transformare între deplasări și între forțe. Aceste relații sînt:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{AU}, \\ \mathbf{P} &= \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{S}}, \end{aligned} \tag{XIX.9}$$

unde $\mathbf{A}$ reprezintă matricea de localizare. Această matrice este dreptunghiulară avînd $6b$ sau $4b$ linii și N coloane, iar $\mathbf{U}$ și $\mathbf{P}$ au expresiile:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T &= \{U_1\ U_2\ \ldots\ U_N\}, \\ \mathbf{P}^T &= \{P_1\ P_2\ \ldots\ P_N\}. \end{aligned} \tag{XIX.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Elementele pe linii ale matricei **A** sînt egale cu zero, cu excepția unuia singur care este egal cu 1 și care identifică (localizează) elementul vectorului **u** funcție de elementul vectorului $\bar{\mathbf{u}}$. Pentru exemplificare se consideră structura din figura XIX.4, formată din bare dublu articulate.

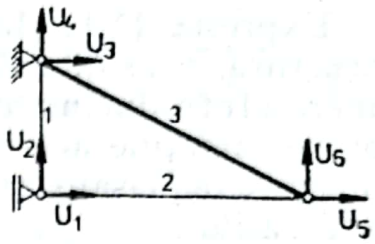


Fig. XIX.4

Forma dezvoltată a primei relații (XIX.9) este

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ - - \\ U_1 \\ U_2 \\ U_5 \\ U_6 \\ - - \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{u}}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \qquad \text{(XIX.11)}$$

A doua relație (XIX.9) se obține scriind egalitatea lucrului mecanic virtual al forțelor **P** și al eforturilor $\bar{\mathbf{S}}$.

La nivelul structurii se poate scrie

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{k}}\,\bar{\mathbf{u}} \qquad \text{(XIX.12)}$$

sau ținînd seama de (XIX.9) rezultă

$$\mathbf{P} = \mathbf{k}\,\mathbf{U}, \qquad \text{(XIX.13)}$$

unde **k** reprezintă matricea de rigiditate a structurii și are forma

$$\mathbf{k} = \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{k}}\,\mathbf{A}. \qquad \text{(XIX.14)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Expresia (XIX.13) reprezintă relaţia forţă — deplasare pentru structură, considerată ca un rigid liber de legăturile cu baza de susţinere. Introducînd condiţiile de rezemare, prin anularea deplasărilor pe direcţiile acestor reazeme, se obţine o formă redusă a relaţiei forţă — deplasare şi care reprezintă ecuaţia matriceală a metodei deplasărilor.

În practică matricea de rigiditate a structurii nu se obţine cu relaţia (XIX.14), deoarece matricea **A** ar ocupa o mare parte din memoria calculatorului. Există modalităţi ca prin programare directă să se obţină elementele matricei **k**, din elementele matricelor de rigiditate $\bar{\mathbf{k}}_i$ ale elementelor.

Rezolvînd ecuaţia matriceală a metodei deplasărilor

$$\mathbf{U}_R = \mathbf{k}_R^{-1}\mathbf{P}, \qquad \text{(XIX.15)}$$

se obţin deplasările nodurilor structurii, cu care se calculează eforturile la capetele elementelor. Are loc apoi trecerea de la structură la element. Etapele sînt următoarele:

— se calculează, pentru elementul i, deplasările în coordonate locale

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{R}_i\bar{\mathbf{u}}_i, \qquad \text{(XIX.16)}$$

— se calculează eforturile cu relaţia

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{k}_i\mathbf{u}_i, \qquad \text{(XIX.17)}$$

pentru elemente neîncărcate cu forţe transversale între noduri şi cu relaţia

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{k}_i\mathbf{u}_i + \mathbf{S}_i^0, \qquad \text{(XIX.18)}$$

pentru elemente încărcate cu forţe transversale între noduri, unde $\mathbf{S}_i^0$ reprezintă forţele echivalente pe bară. În figura XIX.5 sînt prezentate două exemple de bare cu forţele echivalente pe nod şi pe bară.

Calculul structurilor cu ajutorul calculatorului electronic necesită parcurgerea etapelor analizate anterior.

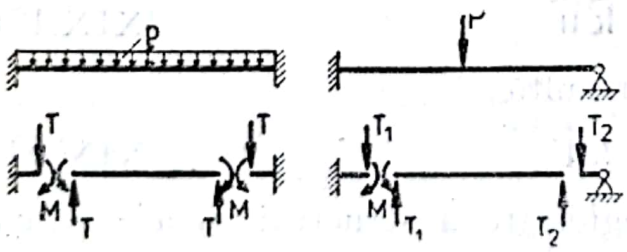


Fig. XIX.5

Ideea care trebuie avută în vedere la întocmirea unui program de calcul, este utilizarea cu maximă eficienţă a memoriei interne a acestuia, în sensul că pentru o memorie dată să se rezolve structuri cu un număr cît mai mare de noduri şi elemente.

Scanned with OKEN Scanner

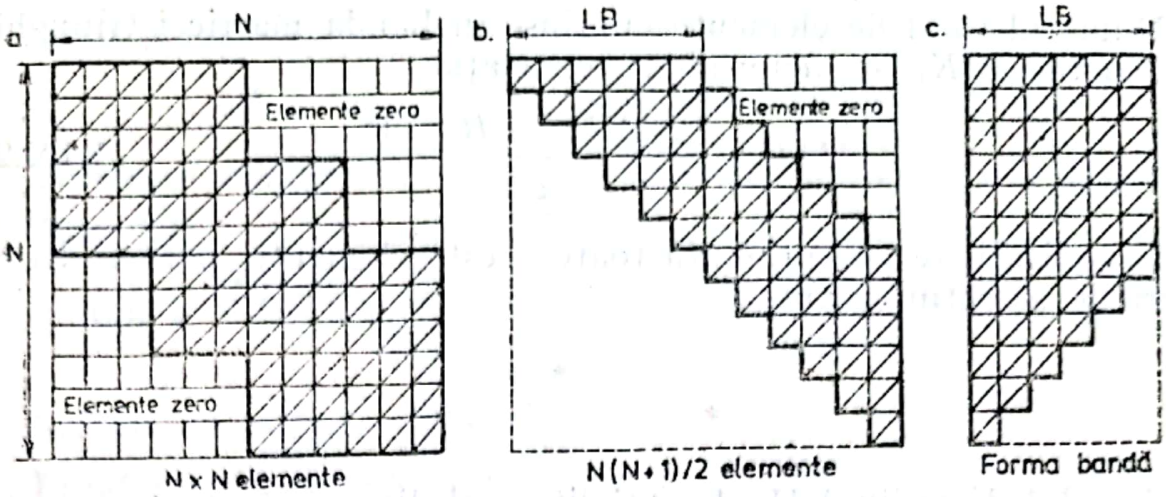


Fig. XIX.6

Dintre toate datele stocate în memoria calculatorului, sub formă de vectori sau tablouri, matricea de rigiditate a structurii, **k**, ocupă cea mai mare parte a acesteia.

Dimensiunile matricei de rigiditate sînt $N \times N$, dar elementele sale sînt simetrice în raport cu diagonala principală, $k_{ij} = k_{ji}$. În consecință, se poate utiliza pentru stocarea matricei **k**, numai zona triunghiulară superioară sau inferioară (fig. XIX.6, b), care are $\frac{N(N+1)}{2}$ elemente. Dar așa cum se poate ușor constata, o mare parte din matricea triunghiulară este alcătuită din elemente egale cu zero. Și aceste elemente pot fi eliminate, și stocate numai cele conținute în banda din vecinătatea diagonalei principale (fig. XIX.6, c).

Lățimea benzii matricei triunghiulare, LB, este un element deosebit de important în stabilirea gradului de ocupare a memoriei. Valoarea sa este funcție de modul de numerotare a nodurilor structurii și se calculează astfel:

— pentru cadre plane

$$LB = (n_s - n_i + 1) \cdot 3, \qquad \text{(XIX.19)}$$

— pentru grinzi cu zăbrele plane,

$$LB = (n_s - n_i + 1) \cdot 2, \qquad \text{(XIX.20)}$$

unde n_s și n_i reprezintă numerele nodurilor de la capetele elementului, n_s fiind valoarea cea mai mare, iar n_i valoarea cea mai mică.

Scanned with OKEN Scanner

Numărul total de elemente cuprinse în banda matricei triunghiulare, notat MK, se determină cu relaţia

$$MK = \frac{LB(2N - LB + 1)}{2}. \qquad \text{(XIX.21)}$$

În aplicaţii se vor prezenta toate aceste elemente, pentru diverse tipuri de structuri plane.

*

* *

Calculul de ordinul II, de stabilitate şi dinamic în formulare matriceală va fi prezentat pe aplicaţii simple, pentru a se evidenţia etapele ce se parcurg în asemenea cazuri. Pentru calculul de ordinul II şi de stabilitate, în formulare matriceală, se utilizează notaţiile din lucrarea [4]. Calculul valorilor şi vectorilor proprii, necesari în calculul de stabilitate şi dinamic, se efectuează prin metoda puterii, prezentată tot în lucrarea [4].

APLICAŢII

Problema 19.1. Pentru structurile din figura 19.1, să se calculeze lăţimea benzii şi numărul maxim de elemente cuprinse în matricea de rigiditate, pentru numerotarea indicată a nodurilor.

Structura în formă de cadru.

Fiind cîte trei coordonate în fiecare nod, rezultă numărul de necunoscute $N = 3 \cdot 10 = 30$.

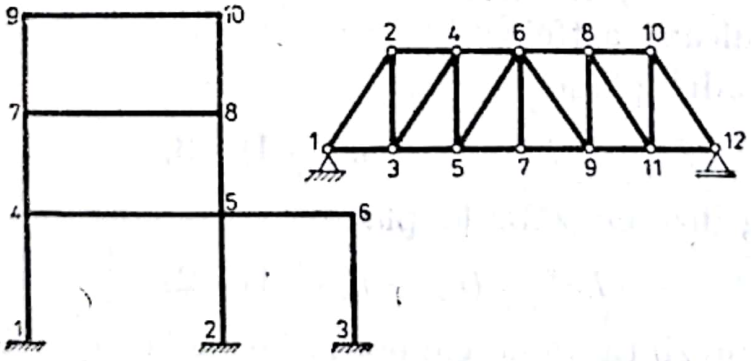


Fig. 19.1

Scanned with OKEN Scanner

Pentru lățimea benzii se obține

$$LB = (n_s - n_i + 1) \cdot 3 = (3 + 1) \cdot 2 = 12.$$

Numărul maxim de elemente cuprinse în banda matricei de rigiditate este

$$MK = \frac{LB(2N - LB + 1)}{2} = \frac{12(2 \cdot 30 - 12 + 1)}{2} = 294.$$

Grinda cu zăbrele plană.

Fiind cîte două coordonate în fiecare nod, rezultă numărul de necunoscute $N = 2 \cdot 12 = 24$.

Pentru lățimea benzii se obține

$$LB = (n_s - n_i + 1) \cdot 2 = (3 + 1) \cdot 2 = 8.$$

Numărul maxim de elemente cuprinse în banda matricei de rigiditate este

$$MK = \frac{LB(2N - LB + 1)}{2} = \frac{8(2 \cdot 24 - 8 + 1)}{2} = 164.$$

Dacă grinda cu zăbrele ar fi considerată cu noduri rigide, atunci în fiecare nod se atașează cîte trei coordonate și rezultă:

$$N = 3 \cdot 12 = 36,$$

$$LB = (3 + 1) \cdot 3 = 12,$$

$$MK = \frac{12(2 \cdot 36 + 12 + 1)}{2} = 366.$$

Problema 19.2. Pentru structura din figura 19.2, cu numerotarea nodurilor dată în două variante, să se calculeze lățimea benzii și numărul maxim de elemente cuprinse în bandă.

Pentru numerotarea din figura 19.2, a, rezultă:

$$N = 3 \cdot 15 = 45,$$

$$LB = (3 + 1) \cdot 3 = 12,$$

$$MK = 474.$$

Scanned with OKEN Scanner

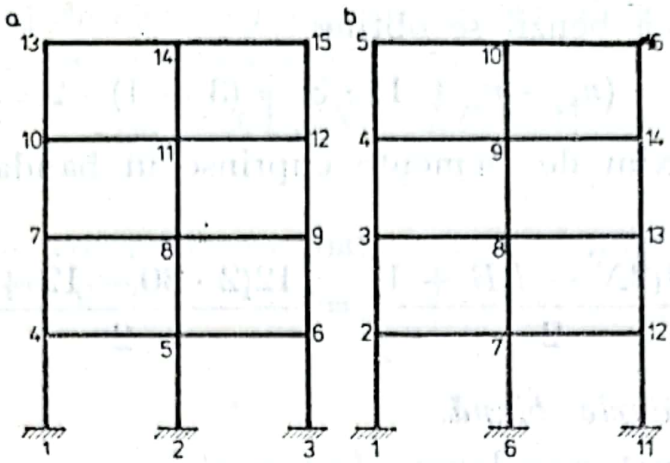


Fig. 19.2

Pentru numerotarea din figura 19.2, b, rezultă:

$$N = 3 \cdot 15 = 45,$$

$$LB = (5 + 1) \cdot 3 = 18,$$

$$MK = 657.$$

Din analiza rezultatelor obținute se desprinde concluzia că pentru structurile dezvoltate pe verticală, numerotarea eficientă este aceea desfășurată pe orizontală (ca la structura din figura 19.2, a).

Matricea de rigiditate, de formă triunghiulară, a structurii, are $N(N + 1)/2 = 1053$ elemente. Prin utilizarea matricei bandă se obține o economie de memorie de 579 și respectiv 396 adrese, iar în procente, de 55% și respectiv 38%.

Problema 19.3. Pentru structura din figura 19.3, cu numerotarea nodurilor dată în două variante, să se calculeze lățimea benzii și numărul maxim de elemente cuprinse în bandă.

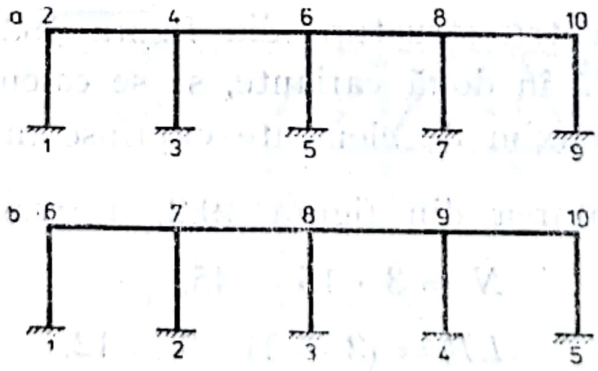


Fig. 19.3

Scanned with OKEN Scanner

Pentru numerotarea din figura 19.3,a rezultă:

$$N = 3 \cdot 10 = 30,$$

$$LB = (2 + 1) \cdot 3 = 9,$$

$$MK = 234.$$

Pentru numerotarea din figura 19.3,b, rezultă:

$$N = 30,$$

$$LB = (5 + 1) \cdot 3 = 18,$$

$$MK = 387.$$

Din analiza rezultatelor obținute se desprinde concluzia că pentru structurile dezvoltate pe orizontală, numerotarea eficientă este aceea desfășurată pe verticală (ca la structura din figura 19.3, a).

Matricea de rigiditate triunghiulară are $N(N + 1)/2 = 435$ elemente. Economia de memorie este de 231 și respectiv 78 adrese, sau 49% și respectiv 16%.

Problema 19.4. Să se efectueze calculul de ordinul I pentru structura din figura 19.4, utilizînd formularea matriceală a metodei deplasărilor. Se consideră: $A = 24 \cdot 10^{-2}\text{m}^2$, $I = 72 \cdot 10^{-4}\text{m}^4$, $E = 240000$ daN/cm².

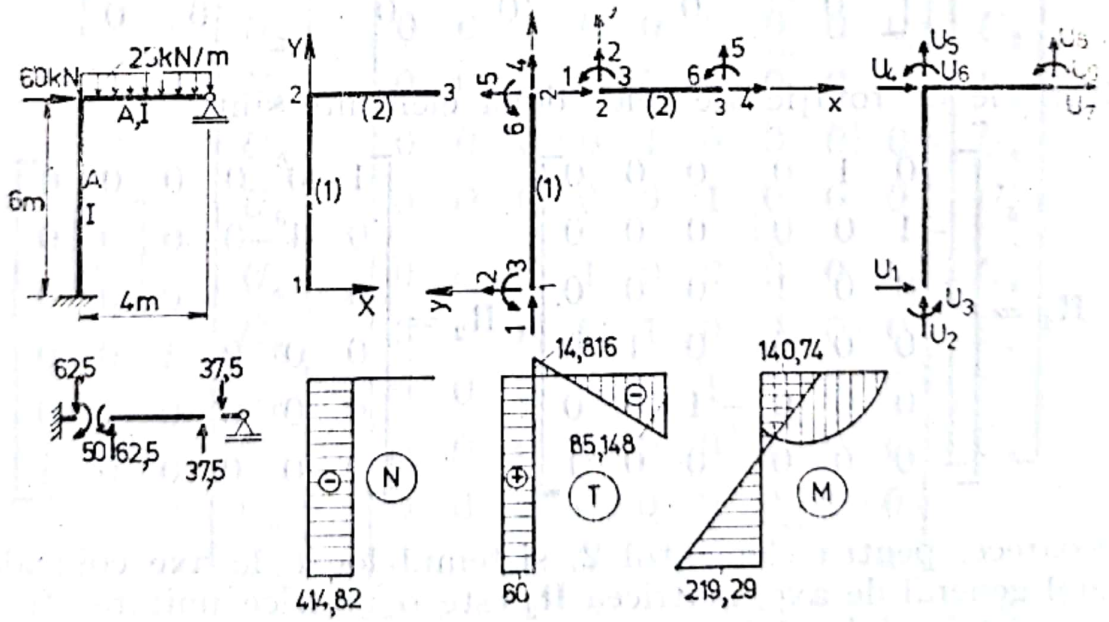


Fig. 19.4

Sistemul general de axe, împărțirea în elemente și deplasările nodurilor structurii sînt prezentate direct în figura 19.4.

Cu notațiile din figura 19.4, rezultă : $N = 3 \cdot 3 = 9$,

$$LB = (1 + 1) \cdot 3 = 6 \text{ și } MK = \frac{6(2 \cdot 9 - 6 + 1)}{2} = 39.$$

Matricele de rigiditate ale celor două elemente, exprimate în sistemul local de coordonate, sînt :

$$\mathbf{k}_1 = 10^3 \begin{bmatrix} 960 & 0 & 0 & -960 & 0 & 0 \\ 0 & 9{,}6 & 28{,}8 & 0 & -9{,}6 & 28{,}8 \\ 0 & 28{,}8 & 115{,}2 & 0 & -28{,}8 & 57{,}6 \\ -960 & 0 & 0 & 960 & 0 & 0 \\ 0 & -9{,}6 & -28{,}8 & 0 & 9{,}6 & -28{,}8 \\ 0 & 28{,}8 & 57{,}6 & 0 & -28{,}8 & 115{,}2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_2 = 10^3 \begin{bmatrix} 1440 & 0 & 0 & -1440 & 0 & 0 \\ 0 & 8{,}1 & 32{,}4 & 0 & -8{,}1 & 0 \\ 0 & 32{,}4 & 129{,}6 & 0 & -32{,}4 & 0 \\ -1440 & 0 & 0 & 1440 & 0 & 0 \\ 0 & -8{,}1 & -32{,}4 & 0 & 8{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matricele de rotație ale celor două elemente sînt :

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deoarece, pentru elementul 2, sistemul local de axe coincide cu sistemul general de axe, matricea $\mathbf{R}_2$ este o matrice unitate. În consecință matricea de rigiditate a acestui element, în coordonate ge-

Scanned with OKEN Scanner

nerale, $\bar{\mathbf{k}}_2$, este egală cu $\mathbf{k}_2$. Pentru elementul 1, matricea $\bar{\mathbf{k}}_1$, calculată cu relația (XIX.7), are forma

$$\bar{\mathbf{k}}_1 = 10^3 \begin{bmatrix} 9{,}6 & 0 & -28{,}8 & -9{,}6 & 0 & -28{,}8 \\ 0 & 960 & 0 & 0 & -960 & 0 \\ -28{,}8 & 0 & 115{,}2 & 28{,}8 & 0 & 57{,}6 \\ -9{,}6 & 0 & 28{,}8 & 9{,}6 & 0 & 28{,}8 \\ 0 & -960 & 0 & 0 & 960 & 0 \\ -28{,}8 & 0 & 57{,}6 & 28{,}8 & 0 & 115{,}2 \end{bmatrix}$$

Trecerea la structură se face scriind expresiile vectorului forțelor aplicate în noduri, vectorului deplasărilor nodurilor structurii și matricei de rigiditate a structurii.

Vectorii $\mathbf{P}$ și $\mathbf{U}$ au expresiile:

$$\mathbf{P}^T = \{0\ 0\ 0\ 60\ -462{,}5\ -50\ 0\ -37{,}5\ 0\}$$

$$\mathbf{U}^T = \{U_1\ U_2\ U_3\ U_4\ U_5\ U_6\ U_7\ U_8\ U_9\}.$$

Pentru a obține matricea de rigiditate a structurii, cu relația (XIX.14), este necesar să se alcătuiască matricea de localizare $\mathbf{A}$.

Forma dezvoltată a primei relații (XIX.9) este

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_1 \\ \bar{\mathbf{u}}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ \hline U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{bmatrix}$$

Efectuînd produsul $\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{k}}\mathbf{A}$, se obține expresia matricei de rigiditate $\mathbf{k}$, iar relația forță—deplasare, pentru structură, este

Scanned with OKEN Scanner

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 60 \\ -462{,}5 \\ -50 \\ 0 \\ -37{,}5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}}
= 10^3
\underbrace{\begin{bmatrix}
9{,}6 & 0 & -28{,}8 & -9{,}6 & 0 & -28{,}8 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 960 & 0 & 0 & -960 & 0 & 0 & 0 & \\
-28{,}8 & 0 & 115{,}2 & 28{,}8 & 0 & 57{,}6 & 0 & 0 & 0 \\
9{,}6 & 0 & 28{,}8 & 1449{,}6 & 0 & 28{,}8 & -1440 & 0 & 0 \\
0 & -960 & 0 & 0 & 968{,}1 & 32{,}4 & 0 & -8{,}1 & 0 \\
-28{,}8 & 0 & 57{,}6 & 28{,}8 & 32{,}4 & 364{,}8 & 0 & -32{,}4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1440 & 0 & 0 & 1440 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -8{,}1 & -32{,}4 & 0 & 8{,}1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}}_{\mathbf{k}}
\underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}
$$

Scanned with OKEN Scanner

Elementele din zona centrală a matricei de rigiditate au fost obținute prin însumarea elementelor corespunzătoare din matricele de rigiditate ale celor două elemente ce se întîlnesc în nodul 2.

Introducînd condițiile de rezemare $U_1 = U_2 = U_3 = U_8 = 0$ și eliminînd și ultima linie și coloană, ca avînd toate elementele egale cu zero, se obține forma redusă a relației forță — deplasare, care reprezintă ecuația matriceală a metodei deplasărilor

$$\begin{bmatrix} 60 \\ -462{,}5 \\ -50 \\ 0 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 1449{,}6 & 0 & 28{,}8 & -1440 \\ 0 & 968{,}1 & 32{,}4 & 0 \\ 28{,}8 & 32{,}4 & 364{,}8 & 0 \\ -1440 & 0 & 0 & 1440 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{bmatrix}$$

Rezolvînd această ecuație matriceală, $\mathbf{U}_R = \mathbf{k}_R^{-1}\mathbf{P}_R$, se obțin următoarele valori pentru deplasările nodurilor:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}10342 \cdot 10^{-1} \\ -0{,}43210 \cdot 10^{-2} \\ -0{,}13637 \cdot 10^{-2} \\ 0{,}10342 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

Calculul eforturilor

— pentru elementul 1, eforturile se calculează cu relația $\mathbf{S}_1 = \mathbf{k}_1\mathbf{u}_1$, unde $\mathbf{u}_1 = \mathbf{R}_1\bar{\mathbf{u}}_1$, deci:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 \\ -U_1 \\ U_3 \\ U_5 \\ -U_4 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}43210 \cdot 10^{-3} \\ -0{,}10342 \cdot 10^{-1} \\ -0{,}13637 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 414{,}82 \\ 60{,}00 \\ 219{,}29 \\ -414{,}82 \\ -60{,}00 \\ 140{,}74 \end{bmatrix},$$

— pentru elementul 2, eforturile se calculează cu relația

$\mathbf{S}_2 = \mathbf{k}_2\mathbf{u}_2 + \mathbf{S}_2^0$, unde $\mathbf{S}_2^{0T} = \{0 \quad 62{,}5 \quad 50{,}0 \quad 0 \quad 37{,}5 \quad 0\}$.

reprezintă forțele echivalente pe bară.

Scanned with OKEN Scanner

Cu acestea se obține succesiv:

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}10342 \cdot 10^{-1} \\ -0{,}43210 \cdot 10^{-3} \\ -0{,}13637 \cdot 10^{-2} \\ -0{,}10342 \cdot 10^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 14{,}816 \\ -140{,}74 \\ 0 \\ 85{,}148 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Problema 19.5. Se consideră bara din figura 19.5, avînd: $l = 6$ m, $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ daN/cm², $A = 118$ cm², $I_0 = I = 29210$ cm⁴. Se cere să se efectueze calculul de ordinul II, utilizînd, pentru determinarea soluției, metoda iterativă bazată pe noțiunea de rigiditate secantă.

Bara se consideră ca un singur element, căruia i s-a atașat sistemul general de axe și de coordonate și sistemul local de axe și de coordonate (cu semnificația deplasării).

Relațiile care stau la baza metodei utilizate în această aplicație sînt:

$$\mathbf{P} = \mathbf{k}_s \mathbf{U},$$

unde $\mathbf{k}_s$ reprezintă matricea de rigiditate secantă a structurii,

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{k}_{si}\, \mathbf{u}_i,$$

unde $\mathbf{k}_{si}$ reprezintă matricea de rigiditate secantă a unui element de bară.

Calculul se efectuează în cicluri. În ciclul curent matricele de rigiditate ale elementelor și structurii se calculaeză funcție de deplasările nodurilor, obținute în ciclul anterior, deci

$$\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_s\,(\mathbf{U}).$$

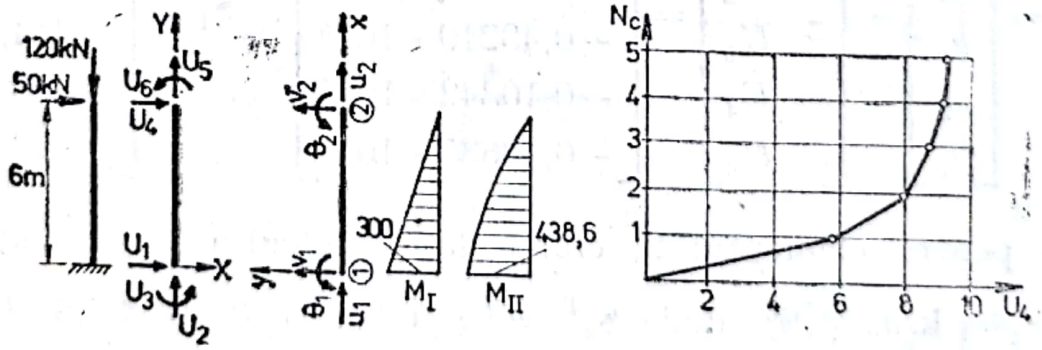


Fig. 19.5

Ciclul 1 de calcul este un calcul de ordinul I, deoarece deplasările nodurilor se consideră inițial egale cu zero și în consecință

$$\mathbf{k}_s\,(\mathbf{U}=0)=\mathbf{k}_E.$$

Se parcurg aceleași etape ca la aplicația precedentă.

Matricea de rigiditate a barei în coordonate locale și matricea de rotație sînt:

$$\mathbf{k}_E = 10^3 \begin{bmatrix} 413 & 0 & 0 & -413 & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}408 & 10{,}244 & 0 & -3{,}408 & 10{,}224 \\ 0 & 10{,}224 & 40{,}894 & 0 & -10{,}224 & 20{,}447 \\ -413 & 0 & 0 & 413 & 0 & 0 \\ 0 & -3{,}408 & -10{,}224 & 0 & 3{,}408 & -10{,}224 \\ 0 & 10{,}224 & 20{,}447 & 0 & -10{,}224 & 40{,}894 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matricea de rigiditate a elementului în coordonate generale ($\bar{\mathbf{k}}_E = \mathbf{R}^T\mathbf{k}\mathbf{R}$), este

$$\bar{\mathbf{k}}_E = 10^3 \begin{bmatrix} 3{,}408 & 0 & -10{,}224 & -3{,}408 & 0 & -10{,}224 \\ 0 & 413 & 0 & 0 & -413 & 0 \\ -10{,}224 & 0 & 40{,}894 & 10{,}224 & 0 & 20{,}447 \\ -3{,}408 & 0 & 10{,}224 & 3{,}408 & 0 & 10{,}224 \\ 0 & -413 & 0 & 0 & 413 & 0 \\ -10{,}224 & 0 & 20{,}447 & 10{,}224 & 0 & 40{,}894 \end{bmatrix}.$$

Deoarece există o singură bară, $\bar{\mathbf{k}}_E = \mathbf{k}_E$.

Forma redusă a relației forță—deplasare (obținută prin introducerea condițiilor de rezemare) este $\mathbf{P}_R = \mathbf{k}_{ER}\,\mathbf{U}_R$, iar cea dezvoltată

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -120 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 340{,}8 & 0 & 1022{,}4 \\ 0 & 41300 & 0 \\ 1022{,}4 & 0 & 4089{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvînd această ecuație, se obțin următoarele valori ale deplasărilor: $U_4 = 5{,}8694 \cdot 10^{-2}$ m, $U_5 = -2{,}904 \cdot 10^{-3}$ m, $U_6 = -1{,}4675 \cdot 10^{-2}$ rad.

Eforturile se calculează cu relația

$$\mathbf{S}^{(1)} = \mathbf{k}_E \mathbf{u}^{(1)}, \text{ unde } \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{R}\mathbf{U}^{(1)},$$

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 \\ -U_1 \\ U_3 \\ U_5 \\ -U_4 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}0029056 \\ -0{,}058688 \\ -0{,}014672 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1200 \\ 50 \\ 300 \\ -1200 \\ -50 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ciclul 2 de calcul utilizează matricea de rigiditate secantă a elementului ($\mathbf{k}_{Gs}$).

Cu valorile deplasărilor din ciclul 1 se calculează elementele matricei $\mathbf{k}_s$ ($\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_E + \mathbf{k}_{Gs}$), care are forma

$$\mathbf{k}_s^{(2)} = 10^3 \begin{bmatrix} 413 & -2{,}121 & -1{,}818 & -413 & 2{,}121 & 1{,}212 \\ -2{,}121 & 3{,}288 & 10{,}163 & 2{,}121 & -3{,}288 & 10{,}163 \\ -1{,}818 & 10{,}163 & 40{,}414 & 1{,}818 & -10{,}163 & 20{,}567 \\ -413 & 2{,}121 & 1{,}818 & 413 & -2{,}121 & -1{,}212 \\ 2{,}121 & -3{,}288 & -10{,}163 & -2{,}121 & 3{,}288 & -10{,}163 \\ 1{,}212 & 10{,}163 & 20{,}567 & -1{,}212 & -10{,}163 & 40{,}414 \end{bmatrix}.$$

Pentru a urmări efectul neliniarității geometrice, se compară elementele matricei $\mathbf{k}_s^{(2)}$ cu elementele matricei $\mathbf{k}_E$, utilizată în ciclul 1 de calcul. Matricea $\mathbf{R}$ rămîne neschimbată.

În continuare se parcurg aceleași etape ca și în calculul de ordinul I, obținînd următoarele valori ale deplasărilor și eforturilor:

$$\mathbf{U}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}079497 \\ -0{,}003373 \\ -0{,}020093 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}^{(2)} = \mathbf{k}_s^{(2)} \mathbf{u}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1131{,}200 \\ 46{,}139 \\ 385{,}210 \\ -1131{,}200 \\ 46{,}139 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

$$k_{Gs} = \frac{EA}{2}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
0 & -\frac{3}{5}v_i - \frac{l}{20}\theta_i + & -\frac{l}{20}v_i - \frac{l^2}{15}\theta_i + & 0 & \frac{3}{5}v_i + \frac{l}{20}\theta_i - & -\frac{l}{20}v_i + \frac{l^2}{60}\theta_i + \\
 & +\frac{3}{5}v_j - \frac{l}{20}\theta_j & +\frac{l}{20}v_j + \frac{l^2}{60}\theta_j & & -\frac{3}{5}v_j + \frac{l}{20}\theta_j & +\frac{l}{20}v_j - \frac{l^2}{15}\theta_j \\
\hline
 & \frac{3(u_j-u_i)}{5} & \frac{l(u_j-u_i)}{20} & \frac{3}{5}v_i + \frac{l}{20}\theta_i - & -\frac{3(u_j-u_i)}{5} & \frac{l(u_j-u_i)}{20} \\
 & & & -\frac{3}{5}v_j + \frac{l}{20}\theta_j & & \\
\hline
 & & \frac{l^2(u_j-u_i)}{15} & \frac{l}{20}v_i + \frac{l^2}{15}\theta_i - & -\frac{l(u_j-u_i)}{20} & -\frac{l^2(u_j-u_i)}{60} \\
 & & & -\frac{l}{20}v_j - \frac{l^2}{60}\theta_j & & \\
\hline
 & \text{Simetric} & & 0 & -\frac{3}{5}v_i - \frac{l}{20}\theta_i + & \frac{l}{20}v_i - \frac{l^2}{60}\theta_i - \\
 & & & & +\frac{3}{5}v_j - \frac{l}{20}\theta_j & -\frac{l}{20}v_j + \frac{l^2}{15}\theta_j \\
\hline
 & & & & \frac{3(u_j-u_i)}{5} & -\frac{l(u_j-u_i)}{20} \\
\hline
 & & & & & \frac{l^2(u_j-u_i)}{15} \\
\hline
\end{array}$$

Scanned with OKEN Scanner

În ciclul 5 de calcul se obține următoarea matrice de rigiditate a barei

$$\mathbf{k}_s^{(5)} = 10^3 \begin{bmatrix} 413 & -3{,}244 & -2{,}800 & -413 & 3{,}244 & 1{,}913 \\ -3{,}244 & 3{,}255 & 10{,}147 & 3{,}244 & -3{,}255 & 10{,}147 \\ -2{,}800 & 10{,}147 & 40{,}284 & 2{,}800 & -10{,}147 & 20{,}599 \\ -413 & 3{,}244 & 2{,}800 & 413 & -3{,}244 & -1{,}913 \\ 3{,}244 & -3{,}255 & -10{,}147 & -3{,}244 & 3{,}255 & -10{,}147 \\ 1{,}913 & 10{,}147 & 20{,}599 & -1{,}913 & -10{,}147 & 40{,}284 \end{bmatrix}$$

După rezolvarea sistemului de ecuații rezultă deplasările și eforturile următoare:

$$\mathbf{U}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}091354 \\ -0{,}003731 \\ -0{,}023188 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}^{(5)} = \mathbf{k}_s^{(5)}\mathbf{u}^{(5)} = \begin{bmatrix} 119{,}947 \\ 49{,}676 \\ 438{,}600 \\ -119{,}947 \\ -49{,}676 \\ 0{,}0 \end{bmatrix}.$$

Efectul neliniarității geometrice se evaluează prin rapoartele momentelor încovoietoare și al deplasărilor din calculul de ordinul II și calculul de ordinul I,

$$\eta_M = \frac{M_{II}}{M_I} = \frac{438{,}600}{300} = 1{,}462,$$

$$\eta_\Delta = \frac{\Delta_{II}}{\Delta_I} = \frac{9{,}1354}{5{,}8688} = 1{,}556.$$

Rezultă că momentele încovoietoare cresc cu 46,2%, iar deplasarea pe orizontală a capătului liber cu 55,6%.

În tabelul ce urmează se prezintă valorile deplasărilor capătului liber și ale momentului încovoietor din încastrare, în toate cele cinci cicluri de calcul.

Ciclul de calcul / Rezultate	1	2	3	4	5
Deplasări (cm)	5,8688	7,9497	8,6786	8,9952	9,1354
Momente încovoietoare (kNm)	300,00	385,210	418,070	432,32	438,60

Scanned with OKEN Scanner

Din analiza rezultatelor se constată că efectul neliniarității este bine evaluat în primele 2—3 cicluri de calcul și apoi tinde lent către valoarea exactă. Cu cît efectul de ordinul II este mai mic, cu atît convergența este mai rapidă. Modul cum deplasarea capătului liber tinde către valoarea exactă, în funcție de numărul de cicluri de calcul, se poate urmări în graficul din figura 19.5.

Problema 19.6. Se consideră structura din figura 19.6, realizată din beton armat, avînd $E_b = 240000$ daN/cm², stîlpul cu secțiunea 30×40 cm² și rigla cu secțiunea 40×60 cm². Se cere să se efectueze calculul de ordinul II, utilizînd, pentru determinarea soluției, metoda corectării lungimii barelor.

Ciclul 1 de calcul este un calcul de ordinul I. Matricele de rigiditate și matricele de rotație ale celor două elemente sînt:

$$\mathbf{k}_1^{(1)} = 10^4 \begin{bmatrix} 48 & 0 & 0 & -48 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}213 & 0{,}640 & 0 & -0{,}213 & 0{,}640 \\ 0 & 0{,}640 & 2{,}560 & 0 & -0{,}640 & 1{,}280 \\ -48 & 0 & 0 & 48 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}213 & -0{,}640 & 0 & 0{,}213 & -0{,}640 \\ 0 & 0{,}640 & 1{,}280 & 0 & -0{,}640 & 2{,}560 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_2^{(1)} = 10^4 \begin{bmatrix} 144 & 0 & 0 & -144 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}81 & 3{,}24 & 0 & -0{,}81 & 0 \\ 0 & 3{,}24 & 12{,}96 & 0 & -3{,}24 & 0 \\ -144 & 0 & 0 & 144 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}81 & -3{,}24 & 0 & 0{,}81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

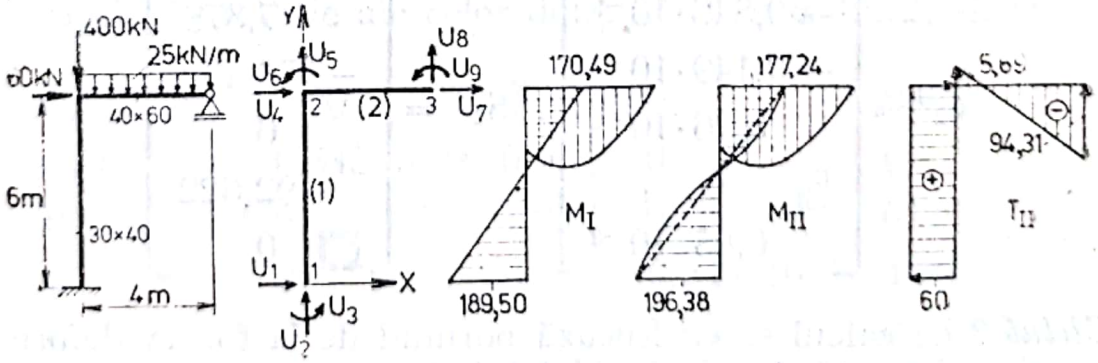


Fig. 19.6

$$\mathbf{R}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ecuația matriceală, obținută după introducerea condițiilor de rezemare, are forma

$$\begin{bmatrix} 60 \\ -462{,}5 \\ -50 \\ 0 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 144{,}213 & 0 & 0{,}640 & -144 \\ 0 & 48{,}81 & 3{,}24 & 0 \\ 0{,}640 & 3{,}24 & 15{,}52 & 0 \\ -144 & 0 & 0 & 144 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{bmatrix}.$$

Rezolvînd ecuația matriceală se obțin următoarele valori ale deplasărilor nodurilor și eforturilor:

$$\mathbf{u}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3{,}26 \cdot 10^{-2} \\ -0{,}848 \cdot 10^{-3} \\ -0{,}149 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 407{,}38 \\ 60{,}00 \\ 189{,}50 \\ -407{,}38 \\ -60{,}00 \\ 170{,}49 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 3{,}26 \cdot 10^{-2} \\ -0{,}848 \cdot 10^{-3} \\ -0{,}149 \cdot 10^{-2} \\ 3{,}26 \cdot 10^{-2} \\ 0 \\ 0{,}85 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7{,}378 \\ -170{,}49 \\ 0 \\ 92{,}622 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ciclul 2 de calcul se efectuează pornind de la forma deformată a structurii, obținută la finele ciclului 1.

Scanned with OKEN Scanner

Noile coordonate ale nodurilor, comparativ cu cele inițiale, sînt:

	Inițiale	După ciclul 1
x_1	0,0	0,0
y_1	0,0	0,0
x_2	0,0	0,0326
y_2	6,0	5,9992
x_3	4,0	4,0326
y_3	6,0	6,00

Calculînd matricele de rigiditate ale celor două elemente, în noua poziție a structurii, se obține

$$\mathbf{k}_1^{(2)} = 10^4 \begin{bmatrix} 48{,}0061 & 0 & 0 & -48{,}0061 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2134 & 0{,}6402 & 0 & -0{,}2134 & 0{,}6402 \\ 0 & 0{,}6402 & 2{,}56032 & 0 & -0{,}6402 & 1{,}28016 \\ -48{,}0061 & 0 & 0 & 48{,}0061 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}2134 & -0{,}6402 & 0 & 0{,}2134 & -0{,}6402 \\ 0 & 0{,}6402 & 1{,}28016 & 0 & -0{,}6402 & 2{,}56032 \end{bmatrix}.$$

Matricea $\mathbf{k}_2^{(2)}$ are aceeași formă ca în ciclul 1.

Particularitatea acestei metode constă și în faptul că, în ciclul 2 de calcul se corectează matricele de rotație ale barelor (ceea ce în metoda care utilizează matricea de rigiditate secantă nu se realizează).

Matricele de rotație ale celor două bare, în ciclul 2, sînt:

$$\mathbf{R}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}543 \cdot 10^{-2} & 1{,}00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1{,}00 & 0{,}543 \cdot 10^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}543 \cdot 10^{-2} & 1{,}00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1{,}00 & 0{,}543 \cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}00 \end{bmatrix},$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\mathbf{R}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 1{,}00 & 0{,}212\cdot10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}212\cdot10^{-3} & 1{,}00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}00 & 0{,}212\cdot10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}212\cdot10^{-3} & 1{,}00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}00 \end{bmatrix}.$$

Ecuația matriceală, în ciclul 2 de calcul, are forma

$$\begin{bmatrix} 60 \\ -462{,}5 \\ -50 \\ 0 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 144{,}2148 & 0{,}290 & 0{,}6395 & -144{,}00 \\ 0{,}290 & 48{,}846 & 3{,}2365 & -0{,}0304 \\ 0{,}6395 & 3{,}2635 & 15{,}5203 & 0{,}687\cdot10^{-3} \\ -144{,}00 & -0{,}0304 & 0{,}687\cdot10^{-3} & 144{,}00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{bmatrix}.$$

Deplasările nodurilor și eforturile, în ciclul 2 de calcul, sînt:

$$\mathbf{u}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3{,}363\cdot10^{-2} \\ -0{,}103\cdot10^{-3} \\ -0{,}149\cdot10^{-2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 402{,}64 \\ 62{,}21 \\ 196{,}17 \\ -402{,}64 \\ -62{,}21 \\ 177{,}04 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 3{,}363\cdot10^{-2} \\ -0{,}103\cdot10^{-3} \\ -0{,}149\cdot10^{-2} \\ 3{,}363\cdot10^{-2} \\ 0 \\ 0{,}876\cdot10^{-3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} -0{,}07 \\ 5{,}74 \\ -177{,}02 \\ 0{,}07 \\ 94{,}26 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Continuînd calculul în același mod, în ciclul 4 (ultimul) se obțin următoarele coordonate de nod:

$$X_2^{(4)} = 0{,}0336 \text{ m},$$
$$Y_2^{(4)} = 5{,}999 \text{ m},$$

Scanned with OKEN Scanner

$$X_3^{(4)} = 4{,}0337 \text{ m},$$

$$Y_3^{(4)} = 6{,}000 \text{ m}.$$

Matricea de rigiditate a barei 1, în acest ciclu de calcul, are forma

$$\mathbf{k}_1^{(4)} = 10^4 \begin{bmatrix} 48{,}0075 & 0 & 0 & -48{,}0075 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2134 & 0{,}6402 & 0 & -0{,}2134 & 0{,}6402 \\ 0 & 0{,}6402 & 2{,}5604 & 0 & -0{,}6402 & 1{,}2802 \\ -48{,}0075 & 0 & 0 & 48{,}0075 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}2134 & -0{,}6402 & 0 & 0{,}2134 & -0{,}6402 \\ 0 & 0{,}6402 & 1{,}2802 & 0 & -0{,}6402 & 2{,}5604 \end{bmatrix},$$

iar matricele de rotație sînt:

$$\mathbf{R}_1^{(4)} = \begin{bmatrix} 0{,}561 \cdot 10^{-2} & 1{,}00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1{,}00 & 0{,}561 \cdot 10^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}561 \cdot 10^{-2} & 1{,}00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1{,}00 & 0{,}561 \cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}00 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_2^{(4)} = \begin{bmatrix} 1{,}00 & 0{,}258 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}258 \cdot 10^{-3} & 1{,}00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}00 & 0{,}258 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}258 \cdot 10^{-3} & 1{,}00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}00 \end{bmatrix}.$$

Ecuația matriceală, în ciclul 4 de calcul, este

$$\begin{bmatrix} 60 \\ -462{,}5 \\ -50 \\ 0 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 144{,}215 & 0{,}305 & 0{,}6393 & -144{,}00 \\ 0{,}305 & 48{,}816 & 3{,}236 & -0{,}037 \\ 0{,}6393 & 3{,}235 & 15{,}5204 & 0{,}836 \cdot 10^{-3} \\ -144{,}00 & -0{,}037 & 0{,}836 \cdot 10^{-3} & 144{,}00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deplasările nodurilor și eforturile sînt:

$$\mathbf{u}_1^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3{,}366 \cdot 10^{-2} \\ -0{,}103 \cdot 10^{-2} \\ -0{,}149 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_1^{(4)} = \begin{bmatrix} 405{,}34 \\ 62{,}28 \\ 196{,}38 \\ -405{,}34 \\ -62{,}28 \\ 177{,}24 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2^{(4)} = \begin{bmatrix} 3{,}366 \cdot 10^{-2} \\ -0{,}103 \cdot 10^{-2} \\ -0{,}149 \cdot 10^{-2} \\ 3{,}366 \cdot 10^{-2} \\ 0 \\ 0{,}877 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2^{(4)} = \begin{bmatrix} 0{,}15 \\ 5{,}69 \\ -177{,}24 \\ 0{,}15 \\ 94{,}31 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Evaluînd rapoartele momentelor încovoietoare și deplasărilor din calculul de ordinul II (ciclul 4) și calculul de ordinul I (ciclul 1), rezultă efectul neliniarității geometrice:

$$\eta_M = \frac{M_{II}}{M_I} = \frac{196{,}38}{189{,}55} = 1{,}036,$$

$$\eta_\Delta = \frac{\Delta_{II}}{\Delta_I} = \frac{3{,}366}{3{,}26} = 1{,}033.$$

Din analiza acestor rezultate se desprinde concluzia că structura este suficient de rigidă pentru ca efectul de ordinul II să rămînă un efect secundar (deci neglijabil).

Forța tăietoare pe stîlp se determină în modul următor

$$T_s = \frac{M_1 + M_2}{l_s} - \frac{N_s \Delta_{II}}{l_s} = \frac{196{,}38 + 177{,}24 - 405{,}34 \cdot 3{,}366 \cdot 10^{-2}}{6} =$$

$$= 59{,}996 \simeq 60 \text{ kN}.$$

Problema 19.7. Fie structura din figura 19.7. Se cere să se determine multiplicatorul critic al forței axiale și lungimea de flambaj a stîlpului. Se consideră:

$EI_s = 33600$ kNm², $EA_s = 252 \cdot 10^4$ kN,

$EI_r = 172800$ kNm², $EA_r = 576 \cdot 10^4$ kN.

Scanned with OKEN Scanner

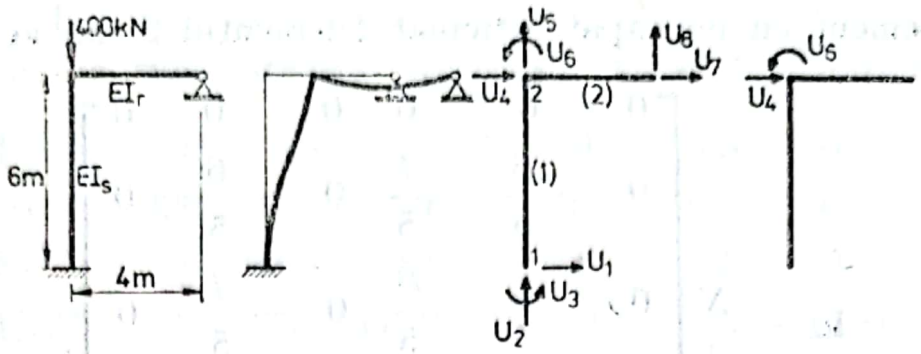


Fig. 19.7

În formulare matriceală, ecuația de stabilitate are forma

$$|\mathbf{k}_T| = |\mathbf{k}_E - \lambda\,\mathbf{k}_{GT}| = 0,$$

unde s-au notat:

$\mathbf{k}_T$, matricea de rigiditate tangentă a structurii,
$\mathbf{k}_E$, matricea de rigiditate elastică (din calculul de ordinul I),
$\mathbf{k}_{GT}$, matricea de rigiditate geometrică tangentă,
λ , multiplicatorul forțelor axiale.

Similar se poate scrie matricea de rigiditate tangentă a unui element de bară,

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{k}_E - \lambda\,\mathbf{k}_{GT}.$$

Matricea $\mathbf{k}_E$ se obține prin asamblarea matricelor $\mathbf{k}_E$ ale elementelor, iar matricea $\mathbf{k}_{GT}$ prin asamblarea matricelor $\mathbf{k}_{GT}$ ale elementelor. Pentru barele neîncărcate axial, matricea $\mathbf{k}_{GT}$ este o matrice nulă (cazul riglelor la structurile în formă de cadru).

Matricea $\mathbf{k}_{GT}$ pentru elementele cu diferite tipuri de legături la capete, are următoarea formă:

— element cu legături de continuitate perfectă la capete (elementul 1 din această aplicație);

$$\mathbf{k}_{GT} = \frac{N}{l}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{l}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{l}{10} \\ 0 & \frac{l}{10} & \frac{2l^2}{15} & 0 & -\frac{l}{10} & \frac{l^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{l}{10} & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{l}{10} \\ 0 & \frac{l}{10} & \frac{l^2}{30} & 0 & -\frac{l}{10} & \frac{2l^2}{15} \end{bmatrix},$$

Scanned with OKEN Scanner

— element cu un capăt articulat (elementul 2 din această aplicație) ;

$$\mathbf{k}_{GT}=\frac{N}{l}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{l}{5} & 0 & -\frac{6}{5} & 0 \\ 0 & \frac{l}{5} & \frac{l^2}{5} & 0 & -\frac{l}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{l}{5} & 0 & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cu datele numerice ale problemei, matricele de rigiditate elastică și geometrică ale celor două elemente sînt :

$$\mathbf{k}_{E1}=10^3\begin{bmatrix} 420 & 0 & 0 & -420 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}867 & 5{,}60 & 0 & 1{,}867 & -5{,}60 \\ 0 & 5{,}60 & 22{,}40 & 0 & -5{,}60 & 11{,}20 \\ -420 & 0 & 0 & 420 & 0 & 0 \\ 0 & -1{,}867 & -5{,}60 & 0 & 1{,}867 & -5{,}60 \\ 0 & -5{,}60 & 11{,}20 & 0 & -5{,}60 & 22{,}40 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{GT_1}=\frac{200}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}2 & 0{,}6 & 0 & -1{,}2 & 0{,}6 \\ 0 & 0{,}6 & 4{,}8 & 0 & -0{,}6 & 1{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1{,}2 & -0{,}6 & 0 & 1{,}2 & -0{,}6 \\ 0 & 0{,}6 & 1{,}2 & 0 & -0{,}6 & 4{,}8 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{E2}=10^3\begin{bmatrix} 1440 & 0 & 0 & -1440 & 0 & 0 \\ 0 & 8{,}1 & 32{,}4 & 0 & -8{,}1 & 0 \\ 0 & 32{,}4 & 129{,}6 & 0 & -32{,}4 & 0 \\ -1440 & 0 & 0 & 1440 & 0 & 0 \\ 0 & -8{,}1 & -32{,}4 & 0 & 8{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Matricea $\mathbf{k}_{GT_2}$ este o matrice nulă $(N_r = 0)$

Matricele de rigiditate ale structurii, $\mathbf{k}_E$ și $\mathbf{k}_{GT}$, rezultă:

$$\mathbf{k}_E = 10^3 \begin{bmatrix} 1{,}867 & 0 & -5{,}6 & -1{,}867 & 0 & -5{,}6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 420 & 0 & 0 & -420 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5{,}6 & 0 & 22{,}4 & 5{,}6 & 0 & 11{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ -1{,}867 & 0 & 5{,}6 & 1441{,}867 & 0 & 5{,}6 & -1440 & 0 & 0 \\ 0 & -420 & 0 & 0 & 428{,}1 & 32{,}4 & 0 & -8{,}1 & 0 \\ -5{,}6 & 0 & 11{,}2 & 5{,}6 & 32{,}4 & 152 & 0 & -32{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1440 & 0 & 0 & 1440 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8{,}1 & -32{,}4 & 0 & 8{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{GT} = \begin{bmatrix} 80 & 0 & -40 & -80 & 0 & -40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -40 & 0 & 320 & 40 & 0 & -80 & 0 & 0 & 0 \\ -80 & 0 & 40 & 80 & 0 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -40 & 0 & 80 & 40 & 0 & 320 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Introducînd condițiile de rezemare, $U_1 = U_2 = U_3 = U_8 = 0$, și observînd că liniile și coloanele 2,5 și 7, în $\mathbf{k}_{GT}$, sînt formate numai din elemente egale cu zero, se ajunge la forma redusă a matricei $\mathbf{k}_{GT}$, formă notată cu $\mathbf{k}_{GR}$,

$$\mathbf{k}_{GR} = \begin{bmatrix} 80 & 40 \\ 40 & 320 \end{bmatrix}.$$

Coordonatele care rămîn după aceste reduceri sînt U_4 și U_6.

Matricea de rigiditate elastică redusă, $\mathbf{k}_{ER}$, este

$$\mathbf{k}_{ER} = 10^3 \begin{bmatrix} 1{,}867 & 5{,}6 \\ 5{,}6 & 149{,}547 \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

și a fost calculată cu relația $\mathbf{k}_{ER} = \mathbf{k}_{ERR} - \mathbf{k}_{ERC}\,\mathbf{k}_{ECC}^{-1}\,\mathbf{k}_{ECR}$, unde elementele componente au rezultat din partiționarea matricei $\mathbf{k}_E$ în modul indicat mai jos

$$\mathbf{k}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ERR} & \mathbf{k}_{ERC} \\ \mathbf{k}_{ECR} & \mathbf{k}_{ECC} \end{bmatrix},$$

cu $|\mathbf{k}_{ECC}| \neq 0$, ceea ce corespunde condiției de existență a inversei acestei submatrice.

Ecuația de stabilitate are acum forma

$$|\mathbf{k}_{ER} - \lambda \mathbf{k}_{GR}| = 0$$

sau

$$|\omega - \mathbf{k}_{ER}^{-1}\,\mathbf{k}_{GR}| = 0, \qquad \text{cu } \omega = \frac{1}{\lambda}.$$

Produsul $\mathbf{k}_{ER}^{-1}\,\mathbf{k}_{GR}$ nu reprezintă o matrice simetrică și de aceea se face transformarea $\mathbf{k}_{GR} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, unde $\mathbf{L}$ este o matrice triunghiulară inferioară.

După înlocuire în forma redusă și premultiplicare cu $\mathbf{L}^T$, se obține:

$$|\omega - \mathbf{S}|\mathbf{X} = 0,$$

unde: $\mathbf{S} = \mathbf{L}^T\mathbf{k}_{ER}^{-1}\mathbf{L}$ reprezintă matricea de stabilitate simetrică, $\mathbf{X} = \mathbf{L}^T\mathbf{u}_R$ este vectorul propriu al matricei $\mathbf{S}$, iar $\mathbf{u}_R$ forma redusă a vectorului deplasărilor nodurilor.

Matricea $\mathbf{L}^T$, obținută din $\mathbf{k}_{GR}$, printr-o operație Cholesky, are forma

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} 8{,}944 & 4{,}472 \\ 0 & 17{,}320 \end{bmatrix},$$

iar matricea de stabilitate $\mathbf{S}$ este

$$\mathbf{S} = 10^{-2}\begin{bmatrix} 4{,}661 & -0{,}291 \\ -0{,}291 & 0{,}2259 \end{bmatrix}.$$

După calculul vectorului propriu $\mathbf{X}$ al matricei $\mathbf{S}$, prin metoda puterii, se obțin deplasările $\mathbf{u}_R = [\mathbf{L}^T]^{-1}\mathbf{X}$, unde

$$[\mathbf{L}^T]^{-1} = 10^{-1}\begin{bmatrix} 1{,}116 & -0{,}2867 \\ 0 & 0{,}5776 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din calcul rezultă :

— valoarea proprie $\lambda = \frac{1}{\omega} = 21{,}365$,

— vectorul propriu

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{k}_{ECC}^{-1}\,\mathbf{k}_{ECR} \end{bmatrix} \mathbf{u}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1{,}00 \\ 0{,}2516 \cdot 10^{-2} \\ -0{,}3325 \cdot 10^{-1} \\ 1{,}00 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

— lungimea de flambaj a stîlpului

$$l_f = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{\lambda P}} = 6{,}2295 \text{ m} = 1{,}0382\, l.$$

Vectorul propriu $\mathbf{u}$ permite desenarea formei proprii de pierdere a stabilității (vezi figura 19.7).

Problema 19.8. Să se determine perioada vibrațiilor libere la structura din figura 19.8. Se dau : $E_b = 240000$ daN/cm², $I_s = 16$ dm⁴, $A_s = 12$ dm², $I_r = 72$ dm⁴, $A_r = 24$ dm², $m_1 = 47{,}146$ kNs²/m, $m_2 = 3{,}822$ kNs²/m.

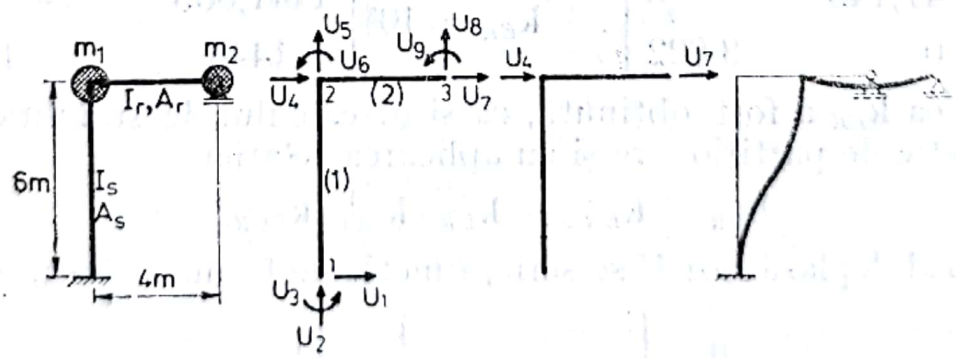


Fig. 19.8

Scanned with OKEN Scanner

S-a considerat că masele se pot deplasa numai pe orizontală și în consecință sistemul apare ca avînd două grade de liberate.

În calculul vibrațiilor proprii la sisteme cu mai multe grade de libertate, ecuația de condiție este

$$[\mathbf{k}_E - \omega^2 \mathbf{M}]\mathbf{u} = 0.$$

Matricele de rigiditate ale elementelor și matricea de rigiditate a structurii sînt aceleași ca și în aplicația 19.6.

Matricea maselor, la nivelul structurii, are forma

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 0 & & & \text{zero} & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 47{,}146 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & \text{zero} & & & & & 3{,}822 & \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Se constată că în cazul maselor concentrate, matricea maselor rezultă o matrice diagonală. Această proprietate a matricei maselor reprezintă un avantaj în ceea ce privește utilizarea memoriei calculatorului.

Pentru a aduce problema la forma matematică de calcul a valorilor și vectorilor proprii, se introduc condițiile de rezemare și apoi se condensează matricele $\mathbf{M}$ în $\mathbf{M}_R$ și $\mathbf{k}_E$ în $\mathbf{k}_{ER}$, prin eliminarea liniilor și coloanelor cu elemente zero. Matricele reduse rezultă:

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 47{,}146 & 0 \\ 0 & 3{,}822 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{ER} = 10^3 \begin{bmatrix} 1441{,}665 & -1440 \\ -1440 & 1440 \end{bmatrix}.$$

Matricea $\mathbf{k}_{ER}$ a fost obținută, ca și în calculul de stabilitate, printr-o operație de partiționare și cu aplicarea relației

$$\mathbf{k}_{ER} = \mathbf{k}_{ERR} - \mathbf{k}_{ERC}\, \mathbf{k}_{ECC}^{-1}\, \mathbf{k}_{ECR}.$$

Vectorul deplasărilor $\mathbf{U}$ se scrie, funcție de forma redusă, astfel:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} & \mathrm{I} \\ -\mathbf{k}_{ECC}^{-1} & \mathbf{k}_{ECR} \end{bmatrix} \mathbf{u}_R.$$

Scanned with OKEN Scanner

Forma redusă a ecuației de condiție este

$$[\mathbf{k}_{ER} - \omega^2 \mathbf{M}_R]\,\mathbf{u}_R = 0$$

sau

$$[\lambda - \mathbf{k}_{ER}^{-1}\mathbf{M}_R]\,\mathbf{u}_R = 0.$$

Produsul $\mathbf{k}_{ER}^{-1}\mathbf{M}_R = \mathbf{D}$ reprezintă o matrice simetrică, deoarece matricea $\mathbf{M}_R$ este o matrice diagonală. Se obține forma matematică a problemei de valori și vectori proprii,

$$|\lambda - \mathbf{D}| = 0.$$

Cu datele existente rezultă:

$$\mathbf{k}_{ER}^{-1} = 10^{-4}\begin{bmatrix} 5{,}3607 & 5{,}3607 \\ 5{,}3607 & 5{,}3677 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = 10^{-2}\begin{bmatrix} 2{,}5275 & 0{,}7196 \\ 0{,}7196 & 0{,}2051 \end{bmatrix}.$$

Aplicînd metoda puterii se obțin:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} = 6{,}05\ 1/\mathrm{s},$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 1{,}038\ \mathrm{s},$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1{,}00 \\ 0{,}277 \cdot 10^{-2} \\ -4{,}181 \cdot 10^{-2} \\ 1{,}00 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Folosind elementele vectorului propriu $\mathbf{u}_1$, în figura 19.8 s-a reprezentat prima formă proprie de vibrație.

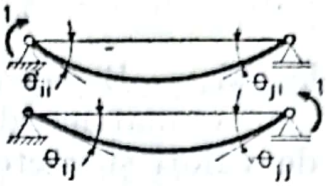
Scanned with OKEN Scanner

ANEXA 2

BARA CU O VUTĂ DREAPTĂ

Coeficienții c', c'', c

$$n = \frac{I_o}{I_1}$$



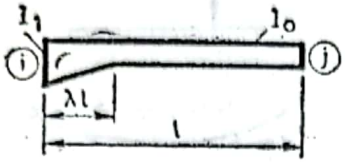
$$\theta_{ii} = \frac{l}{6EI_o} 2c' \quad , \quad \theta_{ij} = \theta_{ji} = \frac{l}{6EI_o} c \quad ; \quad \theta_{jj} = \frac{l}{6EI_o} 2c''$$

Tabelul 2.1

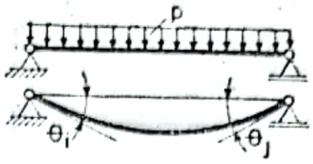
λ	n	1,000	0,800	0,600	0,400	0,300	0,200	0,150	0,125	0,100	0,080	0,060	0,040
1,00	c′	1,000	0,846	0,681	0,500	0,402	0,294	0,236	0,204	0,172	0,144	0,115	0,084
	c″	1,000	0,946	0,879	0,791	0,734	0,659	0,609	0,579	0,545	0,512	0,473	0,421
	c	1,000	0,894	0,773	0,628	0,541	0,438	0,376	0,341	0 302	0,268	0,229	0,184
0,75	c′	1,000	0,862	0,712	0,546	0,453	0,349	0,291	0,260	0,227	0,198	0,167	0,133
	c″	1,000	0,977	0,949	0,912	0,888	0,856	0,835	0,823	0,808	0,794	0,778	0,756
	c	1,000	0,925	0,838	0,732	0,667	0,587	0,539	0,511	0,480	0,451	0,418	0,378
0,50	c′	1,000	0,890	0,769	0,631	0,553	0,464	0,413	0,385	0,355	0,328	0,299	0,266
	c″	1,000	0,993	0,985	0,974	0,967	0,957	0,951	0,947	0,943	0,939	0,934	0,928
	c	1,000	0,960	0,913	0,855	0,818	0,774	0,746	0,730	0,712	0,695	0,676	0,651
0,40	c′	1,000	0,905	0,800	0,681	0,612	0,533	0,488	0,463	0,436	0,412	0,385	0,354
	c″	1,000	0,997	0,992	0,987	0,983	0,978	0,975	0,973	0,970	0,968	0,966	0,963
	c	1,000	0,973	0,940	0,901	0,875	0,844	0,825	0,813	0,801	0,789	0,775	0,758
0,35	c′	1,000	0,915	0,819	0,711	0,648	0,576	0,534	0,510	0,483	0,462	0,438	0,408
	c″	1,000	0,998	0,995	0,991	0,990	0,984	0,982	0,981	0,980	0,978	0,977	0,975
	c	1,000	0,978	0,954	0,924	0,900	0,876	0,864	0,852	0,840	0,834	0,822	0,810
0,30	c′	1,000	0,923	0,839	0,741	0,685	0,620	0,582	0,561	0,538	0,518	0,495	0,469
	c″	1,000	0,998	0,997	0,994	0,993	0,991	0,989	0,988	0,987	0,987	0,986	0,984
	c	1,000	0,983	0,964	0,940	0,925	0,907	0,895	0,888	0,880	0,872	0,864	0,854
0,25	c′	1,000	0,933	0,861	0,777	0,726	0,669	0,636	0,620	0,599	0,581	0,560	0,535
	c″	1,000	0,999	0,998	0,997	0,997	0,996	0,995	0,995	0,994	0,994	0,993	0,992
	c	1,000	0,990	0,972	0,960	0,948	0,930	0,924	0,917	0,913	0,909	0,902	0,895
0,20	c′	1,000	0,945	0,884	0,814	0,773	0,725	0,697	0,682	0,665	0,650	0,632	0,612
	c″	1,000	1,000	0,999	0,998	0,998	0,997	0,997	0,997	0,996	0,996	0,996	0,995
	c	1,000	0,992	0,983	0,972	0,965	0,956	0,950	0,947	0,943	0,940	0,935	0,930
0,15	c′	1,000	0,957	0,909	0,855	0,822	0,786	0,762	0,752	0,665	0,650	0,632	0,612
	c″	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,996	0,996	0,996	0,996
	c	1,000	0,997	0,993	0,984	0,978	0,973	0,972	0,967	0,943	0,940	0,935	0,930
0,10	c′	1,000	0,971	0,938	0,900	0,877	0,851	0,836	0,827	0,738	0,726	0,711	0,696
	c″	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,998	0,998	0,997
	c	1,000	0,998	0,995	0,992	0,991	0,988	0,987	0,986	0,965	0,963	0,961	0,958
0,00	c′	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	c″	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	c	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Scanned with OKEN Scanner

Coeficienţii α_1, α_2



$$n = \frac{I_0}{I_1}$$



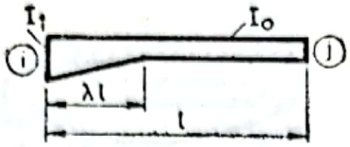
$$\theta_i = \frac{l}{6EI_0} s'm_i \; ; \quad \theta_j = \frac{l}{6EI_0} s''m_j \; ; \quad s'm_i = \alpha_1 pl^2 \; , \quad s''m_j = \alpha_2 pl^2$$

Tabelul 2.2

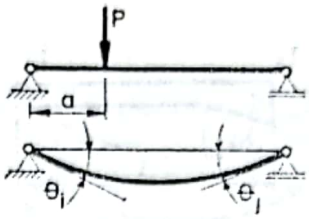
λ	n	1,000	0,800	0,600	0,400	0,300	0,200	0,150	0,125	0,100	0,080	0,060	0,040
1,00	α_1	0,250	0,218	0,184	0,143	0,112	0,092	0,076	0,068	0,059	0,051	0,042	0,032
	α_2	0,250	0,229	0,203	0,172	0,152	0,127	0,112	0,103	0,093	0,084	0,074	0,060
0,75	α_1	0,250	0,225	0,197	0,163	0,143	0,119	0,104	0,097	0,088	0,080	0,071	0,060
	α_2	0,250	0,238	0,223	0,203	0,191	0,175	0,165	0,159	0,152	0,146	0,139	0,129
0,50	α_1	0,250	0,235	0,217	0,196	0,182	0,165	0,156	0,150	0,144	0,139	0,132	0,124
	α_2	0,250	0,246	0,239	0,232	0,227	0,221	0,217	0,215	0,212	0,209	0,206	0,202
0,40	α_1	0,250	0,239	0,226	0,210	0,200	0,188	0,181	0,177	0,172	0,167	0,162	0,156
	α_2	0,250	0,247	0,244	0,240	0,237	0,234	0,232	0,230	0,228	0,227	0,225	0,223
0,35	α_1	0,250	0,241	0,230	0,218	0,209	0,200	0,194	0,190	0,186	0,182	0,178	0,173
	α_2	0,250	0,248	0,246	0,243	0,241	0,239	0,237	0,236	0,235	0,234	0,233	0,231
0,30	α_1	0,250	0,243	0,235	0,224	0,218	0,211	0,206	0,203	0,200	0,197	0,193	0,198
	α_2	0,250	0,249	0,247	0,245	0,244	0,242	0,241	0,241	0,240	0,239	0,239	0,238
0,25	α_1	0,250	0,245	0,239	0,232	0,227	0,221	0,217	0,215	0,213	0,211	0,208	0,205
	α_2	0,250	0,249	0,248	0,247	0,247	0,245	0,245	0,244	0,244	0,244	0,243	0,242
0,20	α_1	0,250	0,247	0,242	0,238	0,235	0,230	0,228	0,226	0,224	0,223	0,221	0,219
	α_2	0,250	0,250	0,249	0,248	0,248	0,248	0,247	0,247	0,247	0,247	0,247	0,246
0,15	α_1	0,250	0,248	0,245	0,242	0,241	0,238	0,236	0,236	0,235	0,234	0,233	0,231
	α_2	0,250	0,250	0,250	0,250	0,249	0,249	0,249	0,248	0,248	0,248	0,248	0,248
0,10	α_1	0,250	0,249	0,248	0,247	0,246	0,244	0,244	0,244	0,243	0,242	0,242	0,241
	α_2	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250
0,00	α_1	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250
	α_2	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250

Scanned with OKEN Scanner

Coeficienţii α_3, α_4



$n = \frac{I_0}{I_1}$



$\theta_i = \frac{l}{6EI_0} s'm_i$; $\theta_j = \frac{l}{6EI_0} s''m_j$; $s'm_i = \alpha_3 Pl$, $s''m_j = \alpha_4 Pl$

Tabelul 2.3

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1,00	1,00	α_3	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		α_4	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	α_3	0,109	0,181	0,229	0,252	0,252	0,230	0,189	0,137	0,070
		α_4	0,069	0,138	0,195	0,244	0,277	0,290	0,276	0,225	0,141
	0,20	α_3	0,053	0,094	0,121	0,137	0,140	0,131	0,112	0,082	0,043
		α_4	0,044	0,087	0,125	0,158	0,184	0,197	0,193	0,164	0,106
	0,10	α_3	0,032	0,056	0,075	0,086	0,089	0,085	0,073	0,055	0,029
		α_4	0,031	0,061	0,087	0,112	0,132	0,144	0,143	0,127	0,085
	0,05	α_3	0,019	0,034	0,046	0,053	0,056	0,055	0,049	0,037	0,020
		α_4	0,021	0,043	0,061	0,078	0,094	0,104	0,106	0 095	0 067
0,75	1,00	α_3	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		α_4	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	α_3	0,115	0,199	0,250	0,275	0,275	0,252	0,209	0,149	0,077
		α_4	0,077	0,152	0,224	0,280	0,318	0,332	0,316	0,261	0,157
	0,20	α_3	0,064	0,115	0,152	0,175	0,182	0,174	0,149	0,110	0,058
		α_4	0,059	0,116	0,169	0,217	0,253	0,274	0,271	0,230	0,142
	0,10	α_3	0,042	0,078	0,106	0,125	0,134	0,132	0,117	0,088	0,047
		α_4	0,048	0,095	0,140	0,182	0,216	0,239	0,242	0,211	0,133
	0,05	α_3	0,029	0,053	0,074	0,080	0,100	0,101	0,093	0,072	0,039
		α_4	0,040	0,079	0,118	0,154	0,186	0,209	0,218	0,195	0,124

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.3 (continuare)

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,50	1,00	α_3	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		α_4	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	α_3	0,127	0,225	0,287	0,317	0,318	0,289	0,236	0,169	0,088
		α_4	0,089	0,173	0,251	0,315	0,355	0,368	0,346	0,282	0,169
	0,20	α_3	0,086	0,159	0,215	0,250	0,262	0,245	0,205	0,147	0,076
		α_4	0,077	0,153	0,224	0,286	0,332	0,350	0,332	0,271	0,163
	0,10	α_3	0,068	0,128	0,178	0,214	0,231	0,221	0,187	0,134	0,070
		α_4	0,071	0,141	0,209	0,270	0,318	0,338	0,323	0,265	0,160
	0,05	α_3	0,055	0,106	0,151	0,187	0,207	0,202	0,172	0,125	0,065
		α_4	0,067	0,132	0,197	0,257	0,306	0,329	0,316	0,260	0,157
0,40	1,00	α_3	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		α_4	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	α_3	0,136	0,238	0,301	0,337	0,336	0,304	0,247	0,176	0,092
		α_4	0,094	0,180	0,258	0,322	0,365	0,375	0,350	0,285	0,170
	0,20	α_3	0,100	0,185	0,251	0,290	0,297	0,274	0,226	0,161	0,083
		α_4	0,084	0,167	0,244	0,310	0,353	0,367	0,344	0,279	0,167
	0,10	α_3	0,084	0,159	0,222	0,265	0,275	0,256	0,214	0,152	0,079
		α_4	0,080	0,159	0,235	0,301	0,346	0,361	0,340	0,277	0,165
	0,05	α_3	0,073	0,140	0,200	0,244	0,259	0,243	0,203	0,145	0,076
		α_4	0,077	0,153	0,227	0,293	0,340	0,356	0,336	0,274	0,164
0,35	1,00	α_3	0,171	0,288	0,367	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		α_4	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,367	0,288	0,171
	0,50	α_3	0,140	0,247	0,307	0,346	0,344	0,310	0,253	0,179	0,093
		α_4	0,095	0,184	0,263	0,326	0,368	0,378	0,353	0,286	0,170
	0,20	α_3	0,109	0,202	0,272	0,310	0,313	0,287	0,236	0,167	0,087
		α_4	0,088	0,173	0,253	0,318	0,361	0,373	0,349	0,283	0,169
	0,10	α_3	0,095	0,179	0,248	0,289	0,296	0,273	0,226	0,161	0,084
		α_4	0,085	0,168	0,246	0,312	0,355	0,368	0,346	0,281	0,168
	0,05	α_3	0,085	0,163	0,230	0,273	0,283	0,262	0,218	0,155	0,081
		α_4	0,082	0,163	0,241	0,307	0,351	0,365	0,343	0,279	0,167
0,30	1,00	α_3	0,171	0,288	0,367	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		α_4	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,367	0,288	0,171
	0,50	α_3	0,143	0,256	0,323	0,355	0,352	0,316	0,259	0,182	0,094
		α_4	0,095	0,185	0,266	0,329	0,371	0,380	0,353	0,286	0,170
	0,20	α_3	0,117	0,217	0,292	0,328	0,328	0,299	0,245	0,173	0,089
		α_4	0,091	0,179	0,260	0,325	0,366	0,377	0,352	0,284	0,169
	0,10	α_3	0,104	0,198	0,273	0,312	0,315	0,288	0,237	0,168	0,087
		α_4	0,088	0,175	0,256	0,321	0,363	0,374	0,350	0,283	0,169
	0,05	α_3	0,095	0,184	0,259	0,299	0,305	0,280	0,237	0,164	0,085
		α_4	0,085	0,171	0,252	0,318	0,360	0,372	0,348	0,282	0,168

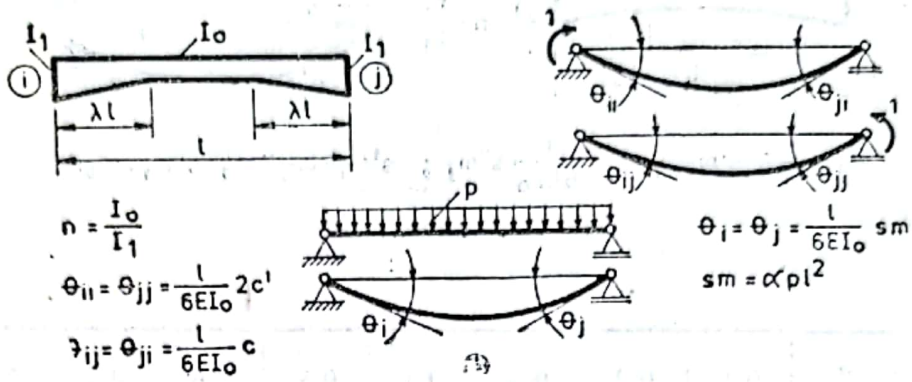
Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.3 (continuare)

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,25	1,00	α_3	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		α_4	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	α_3	0,148	0,263	0,332	0,364	0,358	0,324	0,263	0,124	0,096
		α_4	0,097	0,188	0,269	0,332	0,373	0,382	0,355	0,287	0,170
	0,20	α_3	0,128	0,238	0,308	0,344	0,342	0,310	0,253	0,178	0,092
		α_4	0,094	0,184	0,265	0,329	0,370	0,380	0,354	0,286	0,170
	0,10	α_3	0,118	0,221	0,295	0,332	0,332	0,302	0,245	0,175	0,090
		α_4	0,092	0,181	0,263	0,327	0,368	0,379	0,353	0,286	0,170
	0,05	α_3	0,109	0,209	0,283	0,323	0,325	0,295	0,242	0,172	0,089
		α_4	0,091	0,179	0,260	0,325	0,367	0,377	0,352	0,284	0,169
0,20	1,00	α_3	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		α_4	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	α_3	0,154	0,274	0,341	0,371	0,364	0,326	0,266	0,188	0,097
		α_4	0,098	0,190	0,271	0,334	0,374	0,383	0,356	0,287	0,170
	0,20	α_3	0,138	0,253	0,326	0,358	0,353	0,318	0,260	0,183	0,095
		α_4	0,095	0,188	0,269	0,333	0,372	0,382	0,355	0,287	0,170
	0,10	α_3	0,129	0,242	0,317	0,350	0,346	0,313	0,256	0,181	0,094
		α_4	0,094	0,186	0,268	0,332	0,371	0,381	0,355	0,287	0,170
	0,05	α_3	0,122	0,235	0,310	0,344	0,341	0,309	0,253	0,179	0,092
		α_4	0,093	0,185	0,267	0,331	0,371	0,380	0,355	0,286	0,170
0,10	1,00	α_3	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		α_4	0,099	0,192	0,273	0,336	0,373	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	α_3	0,167	0,281	0,349	0,378	0,370	0,331	0,270	0,190	0,098
		α_4	0,098	0,191	0,272	0,335	0,374	0,383	0,357	0,287	0,170
	0,20	α_3	0,155	0,270	0,342	0,371	0,364	0,327	0,267	0,188	0,097
		α_4	0,097	0,190	0,271	0,334	0,375	0,383	0,356	0,287	0,170
	0,10	α_3	0,150	0,265	0,337	0,367	0,360	0,325	0,265	0,187	0,096
		α_4	0,097	0,189	0,271	0,334	0,373	0,383	0,356	0,287	0,170
	0,05	α_3	0,146	0,262	0,333	0,364	0,358	0,323	0,263	0,185	0,095
		α_4	0,096	0,189	0,270	0,333	0,373	0,382	0,356	0,287	0,170
0,00	1,00	α_3	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		α_4	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	α_3	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		α_4	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,20	α_3	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		α_4	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,10	α_3	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		α_4	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,05	α_3	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		α_4	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171

Scanned with OKEN Scanner

Coeficienţii c', c, α

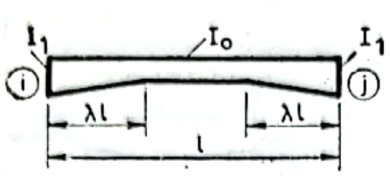


Tabelul 2.4

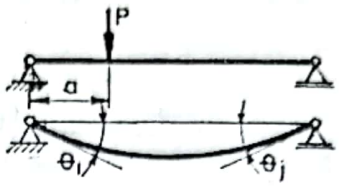
λ	n	1,000	0,800	0,600	0,400	0,300	0,200	0,150	0,125	0,100	0,080	0,060	0,040
0,50	c'	1,000	0,883	0,753	0,605	0,520	0,421	0,364	0,332	0,298	0,267	0,233	0,192
	c	1,000	0,920	0,806	0,710	0,637	0,548	0,493	0,460	0,423	0,390	0,351	0,302
	α	0,250	0,230	0,206	0,178	0,160	0,140	0,123	0,115	0,106	0,098	0,088	0,076
0,40	c'	1,000	0,900	0,793	0,668	0,595	0,512	0,463	0,436	0,407	0,381	0,352	0,317
	c	1,000	0,945	0,881	0,801	0,751	0,689	0,650	0,628	0,602	0,578	0,551	0,517
	α	0,250	0,236	0,220	0,200	0,188	0,172	0,163	0,157	0,151	0,145	0,138	0,129
0,35	c'	1,000	0,912	0,813	0,702	0,636	0,561	0,516	0,491	0,465	0,441	0,414	0,384
	c	1,000	0,960	0,906	0,840	0,804	0,756	0,720	0,705	0,684	0,666	0,642	0,618
	α	0,250	0,239	0,226	0,211	0,200	0,188	0,181	0,176	0,171	0,167	0,161	0,154
0,30	c'	1,000	0,922	0,836	0,736	0,678	0,611	0,572	0,550	0,526	0,505	0,481	0,453
	c	1,000	0,967	0,929	0,880	0,859	0,812	0,789	0,775	0,760	0,745	0,728	0,707
	α	0,250	0,242	0,232	0,220	0,212	0,203	0,197	0,194	0,190	0,187	0,182	0,177
0,25	c'	1,000	0,933	0,858	0,774	0,723	0,666	0,630	0,612	0,591	0,573	0,552	0,528
	c	1,000	0,978	0,948	0,912	0,894	0,864	0,846	0,839	0,828	0,816	0,804	0,792
	α	0,250	0,244	0,237	0,229	0,223	0,217	0,212	0,209	0,207	0,205	0,201	0,197
0,20	c'	1,000	0,945	0,883	0,812	0,771	0,722	0,694	0,678	0,661	0,646	0,628	0,608
	c	1,000	0,985	0,967	0,944	0,929	0,911	0,900	0,893	0,886	0,879	0,871	0,860
	α	0,250	0,246	0,242	0,236	0,232	0,228	0,225	0,223	0,221	0,220	0,218	0,215
0,15	c'	1,000	0,957	0,909	0,855	0,822	0,783	0,762	0,749	0,735	0,723	0,711	0,693
	c	1,000	0,990	0,978	0,966	0,960	0,948	0,942	0,937	0,934	0,930	0,924	0,918
	α	0,250	0,248	0,245	0,242	0,240	0,237	0,236	0,235	0,233	0,232	0,231	0,230
0,10	c'	1,000	0,971	0,938	0,899	0,877	0,851	0,835	0,827	0,817	0,809	0,799	0,788
	c	1,000	0,996	0,991	0,985	0,981	0,976	0,973	0,971	0,970	0,968	0,966	0,963
	α	0,250	0,249	0,248	0,246	0,245	0,244	0,244	0,243	0,242	0,242	0,241	0,241
0,00	c'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	c	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	α	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250

Scanned with OKEN Scanner

Coeficienţii α_5, α_6



$n = \frac{I_0}{I_1}$



$\theta_i = \frac{l}{6EI_0} s'm_i$; $\theta_j = \frac{l}{6EI_0} s''m_j$; $s'm_i = \alpha_5 Pl$; $s''m_j = \alpha_6 Pl$

Tabelul 2.5

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,50	1,00	α_5	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		α_6	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	α_5	0,116	0,210	0,271	0,299	0,297	0,269	0,217	0,151	0,078
		α_6	0,078	0 151	0,217	0,269	0,297	0,299	0,271	0,210	0,116
	0,20	α_5	0,078	0,142	0,189	0,216	0,220	0,196	0,156	0,107	0,055
		α_6	0,055	0,107	0,156	0,196	0,220	0,216	0,189	0,142	0,078
	0,10	α_5	0,056	0,105	0,143	0,169	0,174	0,155	0,122	0,083	0,042
		α_6	0,042	0,083	0,122	0,155	0,174	0,169	0,143	0,105	0,056
	0,05	α_5	0,041	0,078	0,109	0,131	0,138	0,122	0,096	0,065	0,033
		α_6	0,033	0,065	0,096	0,122	0,138	0,131	0,109	0,078	0,041
0,40	1,00	α_5	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		α_6	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	α_5	0,134	0,299	0,296	0,328	0,326	0,292	0,236	0,166	0,088
		α_6	0,088	0,166	0,236	0,292	0,326	0,328	0,296	0,299	0,134
	0,20	α_5	0,096	0,176	0,238	0,273	0,275	0,248	0,197	0,136	0,068
		α_6	0,068	0,136	0,197	0,248	0,275	0,273	0,238	0,176	0,096
	0,10	α_5	0,078	0,148	0,205	0,241	0,247	0,221	0,175	0,119	0,060
		α_6	0,060	0,119	0,175	0,221	0,247	0,241	0,205	0,148	0,078
	0,50	α_5	0,065	0,126	0,179	0,216	0,223	0,200	0,157	0,106	0,053
		α_6	0,053	0,106	0,157	0,200	0,223	0,216	0,179	0,126	0,065
0,35	1,00	α_5	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		α_6	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,05	α_5	0,136	0,241	0,309	0,341	0,338	0,302	0,244	0,172	0,088
		α_6	0,088	0,172	0,244	0,302	0,338	0,341	0,309	0,241	0,136
	0,20	α_5	0,104	0,194	0,262	0,298	0,299	0,269	0,218	0,149	0,074
		α_6	0,074	0,149	0,218	0,269	0,299	0,298	0,262	0,194	0,104
	0,10	α_5	0,088	0,170	0,236	0,272	0,277	0,249	0,200	0,137	0,068
		α_6	0,068	0,137	0,200	0,249	0,277	0,272	0,236	0,170	0,088
	0,05	α_5	0,079	0,152	0,215	0,253	0,259	0,233	0,187	0,126	0,062
		α_6	0,062	0,126	0,187	0,233	0,259	0,253	0,215	0,152	0,079

Scanned with OKEN Scanner

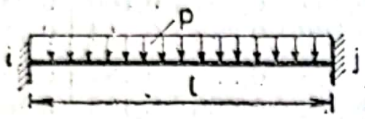
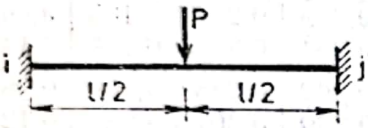
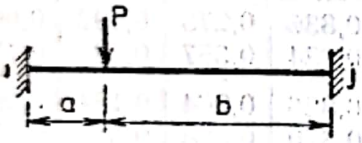
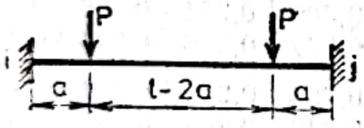
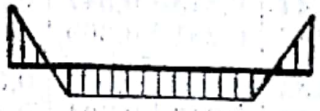
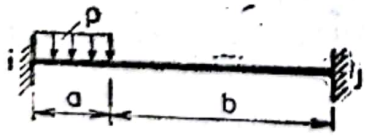
Tabelul 2.5 (continuare)

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,30	1,00	α_5	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		α_6	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	α_5	0,143	0,248	0,320	0,352	0,347	0,312	0,251	0,176	0,092
		α_6	0,092	0,176	0,251	0,312	0,347	0,352	0,320	0,248	0,143
	0,20	α_5	0,115	0,214	0,286	0,320	0,319	0,287	0,232	0,160	0,081
		α_6	0,081	0,160	0,232	0,287	0,319	0,320	0,286	0,214	0,115
	0,10	α_5	0,101	0,193	0,266	0,302	0,302	0,273	0,220	0,151	0,076
		α_6	0,076	0,151	0,220	0,273	0,302	0,302	0,266	0,193	0,101
	0,05	α_5	0,092	0,178	0,250	0,287	0,290	0,262	0,210	0,143	0,072
		α_6	0,072	0,143	0,210	0,262	0,290	0,287	0,250	0,178	0,092
0,25	1,00	α_5	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		α_6	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	α_5	0,144	0,258	0,328	0,361	0,357	0,319	0,257	0,180	0,092
		α_6	0,092	0,180	0,257	0,319	0,357	0,361	0,328	0,258	0,144
	0,20	α_5	0,127	0,232	0,307	0,339	0,336	0,302	0,245	0,169	0,086
		α_6	0,086	0,169	0,245	0,302	0,336	0,339	0,307	0,232	0,127
	0,10	α_5	0,116	0,217	0,291	0,326	0,325	0,293	0,236	0,164	0,083
		α_6	0,083	0,164	0,236	0,293	0,325	0,326	0,291	0,217	0,116
	0,05	α_5	0,106	0,204	0,280	0,316	0,316	0,285	0,230	0,159	0,079
		α_6	0,079	0,159	0,230	0,285	0,316	0,316	0,280	0,204	0,106
0,20	1,00	α_5	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		α_6	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	α_5	0,155	0,266	0,338	0,370	0,364	0,326	0,264	0,184	0,097
		α_6	0,097	0,184	0,264	0,326	0,364	0,370	0,338	0,266	0,155
	0,20	α_5	0,137	0,251	0,325	0,355	0,350	0,315	0,256	0,179	0,091
		α_6	0,091	0,179	0,256	0,315	0,350	0,355	0,325	0,251	0,137
	0,10	α_5	0,128	0,241	0,315	0,347	0,343	0,309	0,251	0,175	0,088
		α_6	0,088	0,175	0,251	0,309	0,343	0,347	0,315	0,241	0,128
	0,05	α_5	0,122	0,232	0,307	0,340	0,337	0,304	0,247	0,172	0,086
		α_6	0,086	0,172	0,247	0,304	0,337	0,340	0,307	0,232	0,122
0,10	1,00	α_5	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		α_6	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	α_5	0,163	0,277	0,348	0,377	0,370	0,331	0,269	0,188	0,098
		α_6	0,098	0,188	0,269	0,331	0,370	0,377	0,348	0,277	0,163
	0,20	α_5	0,154	0,220	0,341	0,370	0,363	0,326	0,265	0,186	0,095
		α_6	0,095	0,186	0,265	0,326	0,363	0,370	0,341	0,220	0,154
	0,10	α_5	0,150	0,265	0,336	0,366	0,359	0,323	0,262	0,184	0,094
		α_6	0,094	0,184	0,262	0,323	0,359	0,366	0,336	0,265	0,150
	0,05	α_5	0,146	0,260	0,332	0,362	0,356	0,320	0,260	0,182	0,092
		α_6	0,092	0,182	0,260	0,320	0,356	0,362	0,332	0,260	0,146

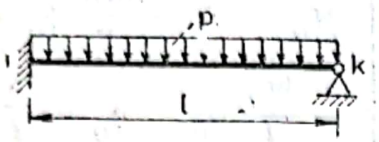
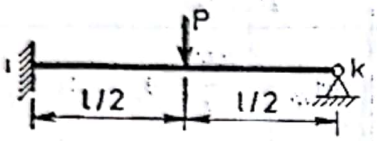
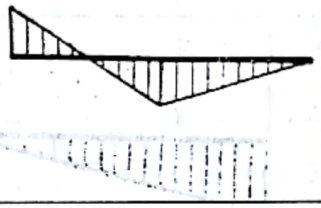
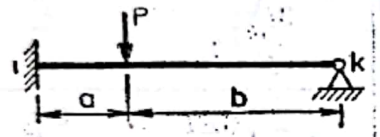
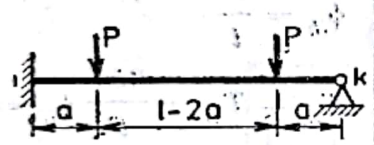
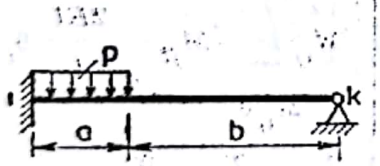
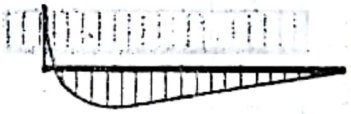
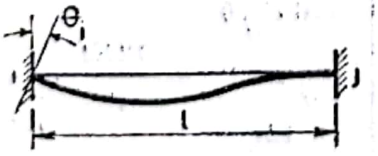
Scanned with OKEN Scanner

ANEXA 3

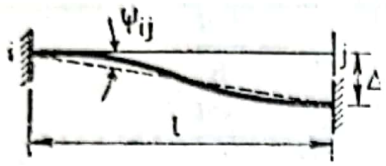
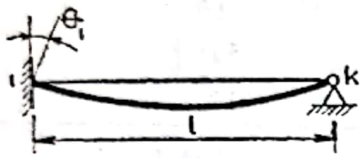
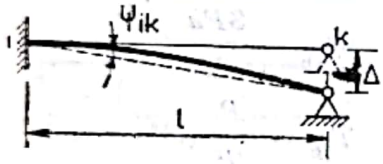
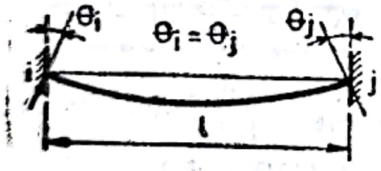
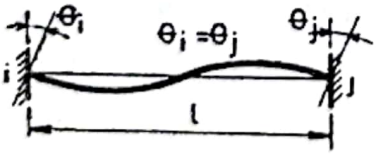
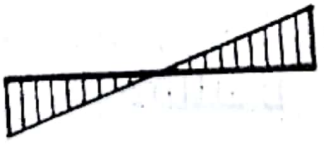
BARE CU SECȚIUNE CONSTANTĂ

Bara	Diagrama de moment încovoietor	Momentul încovoietor și forța tăietoare
		$\mathfrak{M}_{ij} = \mathfrak{M}_{ji} = \frac{pl^2}{12}$ $M_{c,\,max} = \frac{pl^2}{24}$ $T_{ij} = T_{ji} = \frac{pl}{2}$
		$\mathfrak{M}_{ij} = \mathfrak{M}_{ji} = \frac{Pl}{8}$ $M_{c,\,max} = \frac{Pl}{8}$ $T_{ij} = T_{ji} = \frac{P}{2}$
		$\mathfrak{M}_{ij} = \frac{Pab^2}{l^2}$ $\mathfrak{M}_{ji} = \frac{Pa^2b}{l^2}$ $T_{ij} = Pb(l^2-ab+a^2)/l^3$ $T_{ji} = Pa(l^2-ab+b^2)/l^3$
		$\mathfrak{M}_{ij} = \mathfrak{M}_{ji} = \frac{Pa(l-a)}{l}$ $T_{ij} = T_{ji} = P$
		$\mathfrak{M}_{ij} = \frac{pa^3}{12l^2}(a^2+4ab+6b^2)$ $\mathfrak{M}_{ji} = \frac{pa^2}{12l^2}(4l-3a)$ $T_{ij} = \frac{pa}{2l^3}[a(l^2+b^2)+2bl^2]$ $T_{ji} = \frac{pa^2}{2l^3}(l^2-b^2)$

Scanned with OKEN Scanner

Bara	Diagrama de moment încovoietor	Momentul încovoietor și forța de tăiere
		$\mathfrak{M}_{ik} = \frac{pl^2}{8}$ $T_{ik} = \frac{5pl}{8}$ $T_{ki} = \frac{3pl}{8}$
		$\mathfrak{M}_{ik} = \frac{3Pl}{16}$ $T_{ik} = \frac{11P}{16}$ $T_{ki} = \frac{5P}{16}$
		$\mathfrak{M}_{ik} = \frac{Pab(l-b)}{2l^2}$ $T_{ik} = P[ab(l-b)+2l^2b]/2l^3$ $T_{ki} = P[ab(l-b)-2l^2a]/2l^3$
		$\mathfrak{M}_{ik} = \frac{3Pa}{2l}(l-a)$ $T_{ik} = \frac{P}{2l^2}(2l^2+3ab)$ $T_{ki} = \frac{P}{2l^2}(2l^2-3ab)$
		$\mathfrak{M}_{ik} = \frac{pa^2}{8l^2}(2l-a)^2$ $T_{ik} = \frac{pa}{8l^2}[al(8l-3a) +$ $+ b(8l^2-a^2)]$ $T_{ki} = pa - T_{ik}$
		$M_{ij} = \frac{4EI}{l}\theta_i = 4i_{ij}\theta_i$ $M_{ji} = \frac{2EI}{l}\theta_i = 2i_{ij}\theta_i$ $T_{ij} = T_{ji} = \frac{6EI}{l^2}\theta_i = \frac{6i_{ij}}{l}\theta_i$

Scanned with OKEN Scanner

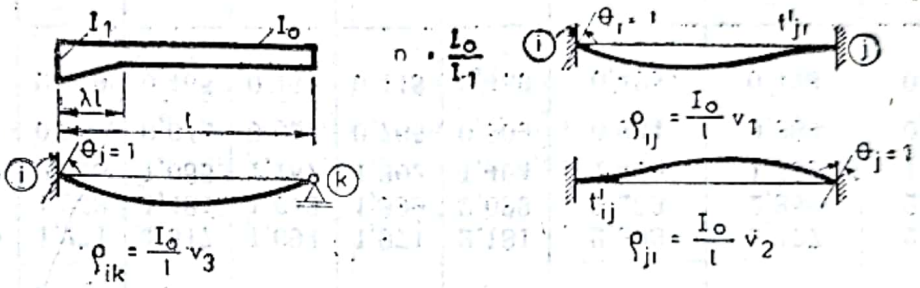
Bara	Diagrama de moment încovoietor	Momentul încovoietor și forța tăietoare
		$M_{ij} = M_{ji} = \frac{6EI}{l^2}\psi_{ij} = \frac{6i_{ij}}{l}\psi_{ij} \qquad \psi_{ij} = \frac{\Delta}{l}$ $T_{ij} = T_{ji} = \frac{12EI}{l^3}\psi_{ij} = \frac{12i_{ij}}{l^2}\psi_{ij}$
		$M_{ik} = \frac{3EI}{l}\theta_i = 3i_{ik}\theta_i$ $T_{ik} = T_{ki} = \frac{3EI}{l^2}\theta_i = \frac{3i_{ik}}{l}\theta_i$
		$M_{ik} = \frac{3EI}{l^2}\psi_{ik} = \frac{3i_{ik}}{l}\psi_{ik}$ $\psi_{ik} = \frac{\Delta}{l}$ $T_{ik} = T_{ki} = \frac{3EI}{l^2}\psi_{ik} = \frac{3i_{ik}}{l}\psi_{ik}$
		$M_{ij} = -M_{ji} = \frac{2EI}{l}\theta_i = 2i_{ij}\theta_i$ $T_{ij} = T_{ji} = 0$
		$M_{ij} = M_{ji} = \frac{6EI}{l}\theta_i = 6\,i_{ij}\theta_i$ $T_{ij} = T_{ji} = \frac{12EI}{l^2}\theta_i = \frac{12i_{ij}}{l}\theta_i$

Scanned with OKEN Scanner

ANEXA 4

BARA CU VUTĂ DREAPTĂ

Coeficienții v_1, v_2, v_3, t'_{ij}, t'_{ji}



Tabelul 4.1

λ	n	1,000	0,800	0,600	0,400	0,300	0,200	0,150	0,125	0,100	0,080	0,060	0,040
1,00	v_1	1,000	1,183	1,470	1,997	2,484	3,390	4,225	4,878	5,821	6,882	8,595	11,803
	v_2	1,000	1,160	1,411	1,860	2,267	3,013	3,687	4,211	4,959	5,790	7,122	9,584
	v_3	0,750	0,886	1,101	1,499	1,867	2,551	3,174	3,671	4,366	5,200	6,510	8,961
	t'_{ij}	0,500	0,529	0,568	0,628	0,674	0,745	0,799	0,834	0,880	0,929	0,995	1,097
	t'_{ji}	0,500	0,472	0 440	0,397	0,369	0,333	0,309	0,295	0,278	0,262	0,243	0,218
0,75	v_1	1,000	1,168	1,423	1,881	2,295	3,021	3,683	4,155	4,843	5,608	6,821	8,869
	v_2	1,000	1,149	1,368	1,757	2,105	2,713	3,249	3,631	4,187	4,800	5,770	7,391
	v_3	0,750	0,870	1,053	1,374	1,657	2,148	2,575	2,884	3,307	3,782	4,488	5,656
	t'_{ij}	0,500	0,537	0,589	0,671	0,737	0,840	0,925	0,983	1,058	1,138	1,251	1,425
	t'_{ji}	0,500	0,475	0,442	0,401	0,376	0,343	0,323	0,311	0,297	0,284	0,269	0,250

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 4.1 (continuare)

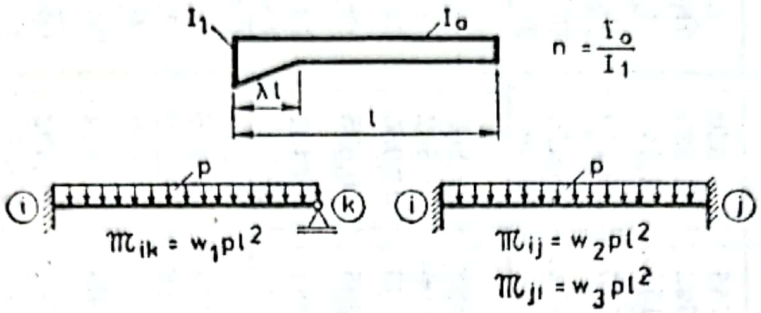
λ	n	1,000	0,800	0,600	0,400	0,300	0,200	0,150	0,125	0,100	0,080	0,060	0,040
0,50	v_1	1,000	1,140	1,346	1,691	1,978	2,445	2,819	3,072	3,417	3,762	4,254	4,987
	v_2	1,000	1,127	1,314	1,683	1,877	2,290	2,618	2,844	3,137	3,435	3,863	4,491
	v_3	0,750	0,843	0,976	1,188	1,356	1,617	1,817	1,949	2,155	2,285	2,508	2,825
	t'_{ij}	0,500	0,540	0,594	0,677	0,740	0,834	0,904	0,949	1,003	1,059	1,129	1,226
	t'_{ji}	0,500	0,483	0,464	0,439	0,423	0,405	0,303	0,386	0,377	0,370	0,362	0,351
0,40	v_1	1,000	1,123	1,299	1,581	1,800	2,139	2,395	2,558	2,780	2,990	3,272	3,664
	v_2	1,000	1,114	1,275	1,535	1,734	2,039	2,271	2,418	2,619	2,805	3,057	3,405
	v_3	0,750	0,829	0,937	1,102	1,225	1,406	1,537	1,619	1,721	1,821	1,947	2,117
	t'_{ij}	0,500	0,537	0,587	0,662	0,717	0,791	0,845	0,878	0,919	0,958	1,006	1,070
	t'_{ji}	0,500	0,488	0,473	0,456	0,445	0,430	0,422	0,418	0,413	0,407	0,401	0,394
0,35	v_1	1,000	1,110	1,271	1,517	1,694	1,971	2,181	2,303	2,477	2,646	2,830	3,137
	v_2	1,000	1,101	1,253	1,481	1,643	1,899	2,092	2,203	2,358	2,515	2,679	2,959
	v_3	0,750	0,820	0,916	1,055	1,157	1,302	1,404	1,469	1,553	1,623	1,712	1,838
	t'_{ij}	0,500	0,534	0,582	0,648	0,697	0,765	0,809	0,834	0,869	0,903	0,942	0,990
	t'_{ji}	0,500	0,490	0,479	0,465	0,455	0,445	0,439	0,435	0,428	0,426	0,420	0,415
0,30	v_1	1,000	1,102	1,240	1,446	1,600	1,819	1,975	2,075	2,195	2,310	2,452	2,654
	v_2	1,000	1,097	1,227	1,420	1,564	1,768	1,912	2,005	2,116	2,221	2,351	2,537
	v_3	0,750	0,812	0,894	1,012	1,095	1,214	1,289	1,337	1,394	1,448	1,514	1,600
	t'_{ij}	0,500	0,532	0,575	0,635	0,675	0,731	0,769	0,791	0,818	0,842	0,872	0,911
	t'_{ji}	0,500	0,493	0,484	0,473	0,466	0,458	0,452	0,449	0,446	0,442	0,438	0,434

Scanned with OKEN Scanner

0,25	v_1	1,000	1,091	1,201	1,376	1,500	1,661	1,783	1,835	1,929	2,018	2,111	2,260
	v_2	1,000	1,087	1,191	1,359	1,476	1,626	1,741	1,788	1,877	1,961	2,046	2,188
	v_3	0,750	0,804	0,871	0,965	1,033	1,121	1,179	1,209	1,252	1,292	1,339	1,402
	t'_{ij}	0,500	0,528	0,565	0,618	0,653	0,695	0,726	0,745	0,763	0,783	0,805	0,834
	t'_{ji}	0,500	0,495	0,488	0,482	0,476	0,469	0,465	0,462	0,460	0,458	0,454	0,452
0,20	v_1	1,000	1,070	1,168	1,300	1,390	1,514	1,594	1,645	1,701	1,755	1,820	1,903
	v_2	1,000	1,068	1,162	1,288	1,373	1,493	1,569	1,617	1,671	1,722	1,783	1,863
	v_3	0,750	0,794	0,848	0,921	0,970	1,035	0,076	1,100	1,129	1,155	1,187	1,225
	t'_{ij}	0,500	0,525	0,557	0,598	0,624	0,660	0,682	0,695	0,710	0,723	0,740	0,760
	t'_{ji}	0,500	0,497	0,492	0,486	0,482	0,479	0,477	0,475	0,473	0,472	0,470	0,468
0,15	v_1	1,000	1,058	1,130	1,224	1,289	1,365	1,428	1,450	1,489	1,525	1,562	1,613
	v_2	1,000	1,057	1,126	1,218	1,281	1,353	1,415	1,435	1,471	1,506	1,542	1,591
	v_3	0,750	0,784	0,825	0,877	0,912	0,954	0,984	0,998	1,016	0,033	1,055	1,078
	t'_{ij}	0,500	0,520	0,545	0,575	0,595	0,620	0,638	0,644	0,654	0,665	0,675	0,690
	t'_{ji}	0,500	0,498	0,495	0,493	0,490	0,487	0,487	0,484	0,482	0,481	0,481	0,479
0,10	v_1	1,000	1,040	1,088	1,149	1,188	1,236	1,268	1,285	1,306	1,324	1,346	1,372
	v_2	1,000	1,039	1,087	1,146	1,185	1,231	1,263	1,279	1,300	1,318	1,339	1,364
	v_3	0,750	0,773	0,800	0,833	0,855	0,881	0,897	0,907	0,917	0,927	0,938	0,952
	t'_{ij}	0,500	0,514	0,531	0,552	0,565	0,581	0,591	0,597	0,602	0,608	0,614	0,623
	t'_{ji}	0,500	0,499	0,498	0,496	0,496	0,494	0,494	0,493	0,493	0,493	0,492	0,491
0,00	v_1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	v_2	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	v_3	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750
	t'_{ij}	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
	t'_{ji}	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500

Scanned with OKEN Scanner

Coeficienţii w_1, w_2, w_3

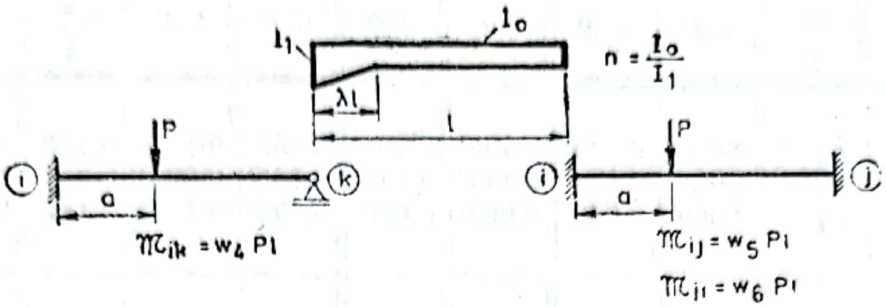


Tabelul 4.2

λ	n	1,000	0,800	0,600	0,400	0,300	0,200	0,150	0,125	0,100	0,080	0,060	0,040
1,00	w_1	0,125	0,129	0,135	0,143	0,148	0,156	0,160	0,166	0,171	0,177	0,182	0,190
	w_2	0,083	0,087	0,092	0,099	0,105	0,112	0,118	0,122	0,126	0,131	0,139	0,145
	w_3	0,083	0,080	0,075	0,069	0,065	0,060	0,055	0,052	0,050	0,047	0,045	0,040
0,75	w_1	0,125	0,131	0,138	0,150	0,158	0,170	0,179	0,186	0,193	0,201	0,212	0,226
	w_2	0,083	0,088	0,094	0,103	0,109	0,118	0,121	0,125	0,131	0,136	0,143	0,153
	w_3	0,083	0,080	0,076	0,070	0,067	0,062	0,059	0,052	0,052	0,047	0,044	0,040
0,50	w_1	0,125	0,132	0,141	0,155	0,165	0,179	0,189	0,196	0,203	0,211	0,221	0,223
	w_2	0,083	0,088	0,095	0,102	0,108	0,117	0,123	0,139	0,134	0,140	0,148	0,159
	w_3	0,083	0,080	0,077	0,070	0,070	0,065	0,057	0,059	0,053	0,050	0,047	0,043
0,40	w_1	0,125	0,132	0,141	0,154	0,164	0,177	0,186	0,190	0,198	0,203	0,211	0,220
	w_2	0,083	0,089	0,096	0,106	0,114	0,125	0,133	0,136	0,144	0,150	0,158	0,166
	w_3	0,083	0,080	0,078	0,074	0,070	0,066	0,063	0,060	0,059	0,056	0,053	0,051
0,35	w_1	0,125	0,132	0,141	0,153	0,162	0,173	0,182	0,186	0,193	0,197	0,203	0,212
	w_2	0,083	0,089	0,095	0,106	0,113	0,123	0,130	0,135	0,140	0,146	0,152	0,161
	w_3	0,083	0,081	0,078	0,074	0,070	0,067	0,063	0,062	0,060	0,058	0,058	0,052
0,30	w_1	0,125	0,132	0,140	0,151	0,159	0,170	0,177	0,181	0,186	0,190	0,195	0,202
	w_2	0,083	0,088	0,095	0,104	0,111	0,121	0,128	0,131	0,136	0,140	0,145	0,153
	w_3	0,083	0,081	0,078	0,074	0,071	0,067	0,064	0,063	0,061	0,059	0,058	0,055
0,25	w_1	0,125	0,131	0,139	0,149	0,156	0,165	0,171	0,173	0,178	0,181	0,186	0,191
	w_2	0,083	0,088	0,094	0,103	0,110	0,118	0,123	0,125	0,129	0,133	0,138	0,143
	w_3	0,083	0,080	0,078	0,075	0,071	0,068	0,066	0,065	0,063	0,062	0,060	0,058
0,20	w_1	0,125	0,130	0,137	0,146	0,151	0,159	0,164	0,166	0,169	0,172	0,175	0,179
	w_2	0,083	0,088	0,093	0,101	0,106	0,113	0,117	0,119	0,122	0,125	0,128	0,132
	w_3	0,083	0,081	0,079	0,075	0,073	0,070	0,068	0,068	0,066	0,065	0,063	0,062
0,15	w_1	0,125	0,130	0,135	0,142	0,146	0,152	0,155	0,157	0,159	0,161	0,164	0,166
	w_2	0,083	0,088	0,092	0,098	0,102	0,107	0,110	0,111	0,113	0,116	0,118	0,121
	w_3	0,083	0,081	0,079	0,077	0,075	0,073	0,071	0,070	0,070	0,068	0,068	0,066
0,10	w_1	0,125	0,128	0,132	0,137	0,140	0,144	0,146	0,147	0,149	0,150	0,151	0,153
	w_2	0,083	0,086	0,090	0,094	0,096	0,100	0,102	0,103	0,105	0,106	0,107	0,108
	w_3	0,083	0,082	0,080	0,078	0,077	0,076	0,075	0,074	0,074	0,073	0,072	0,072
0,00	w_1	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125
	w_2	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083
	w_3	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083

Scanned with OKEN Scanner

Coeficienţii w_4, w_5, w_6



Tabelul 4.3

λ	n		$\frac{a}{l}$ = 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1,00	1,00	w_4	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,136	0,096	0,050
		w_5	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_6	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_4	0,093	0,154	0,196	0,202	0,215	0,196	0,161	0,117	0,059
		w_5	0,091	0,140	0,168	0,172	0,154	0,122	0,085	0,047	0,011
		w_6	0,003	0,023	0,047	0,075	0,102	0,123	0,132	0,116	0,080
	0,20	w_4	0,091	0,159	0,206	0,233	0,239	0,224	0,190	0,140	0,074
		w_5	0,087	0,146	0,179	0,189	0,180	0,149	0,107	0,062	0,018
		w_6	0,004	0,017	0,035	0,057	0,079	0,099	0,108	0,103	0,071
	0,10	w_4	0,093	0,164	0,218	0,250	0,260	0,248	0,213	0,161	0,086
		w_5	0,089	0,151	0,192	0,209	0,203	0,174	0,128	0,077	0,025
		w_6	0,003	0,012	0,025	0,045	0,064	0,084	0,095	0,093	0,067
	0,05	w_4	0,095	0,171	0,231	0,265	0,282	0,276	0,246	0,187	0,100
		w_5	0,090	0,156	0,202	0,226	0,225	0,201	0,154	0,094	0,033
		w_6	0,002	0,010	0,018	0,034	0,050	0,069	0,082	0,082	0,062
0,75	1,00	w_4	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,136	0,096	0,050
		w_5	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_6	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_4	0,091	0,158	0,198	0,218	0,218	0,200	0,166	0,119	0,061
		w_5	0,089	0,145	0,167	0,167	0,152	0,120	0,081	0,042	0,012
		w_6	0,004	0,020	0,050	0,083	0,107	0,128	0,136	0,122	0,079
	0,20	w_4	0,091	0,164	0,217	0,250	0,260	0,249	0,214	0,157	0,083
		w_5	0,087	0,150	0,189	0,202	0,191	0,161	0,114	0,062	0,018
		w_6	0,004	0,016	0,034	0,057	0,083	0,105	0,119	0,113	0,077
	0,10	w_4	0,093	0,172	0,233	0,275	0,298	0,291	0,258	0,194	0,103
		w_5	0,090	0,160	0,206	0,229	0,224	0,196	0,145	0,082	0,024
		w_6	0,003	0,011	0,025	0,044	0,067	0,090	0,107	0,107	0,075
	0,05	w_4	0,096	0,178	0,248	0,299	0,234	0,337	0,309	0,240	0,130
		w_5	0,095	0,169	0,225	0,256	0,263	0,242	0,187	0,110	0,035
		w_6	0,001	0,008	0,019	0,035	0,054	0,075	0,095	0,100	0,072

Lw · 7568

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 4.3. (continuare)

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,50	1,00	w_4	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,136	0,096	0,050
		w_5	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_6	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_4	0,090	0,160	0,203	0,225	0,225	0,205	0,168	0,120	0,062
		w_5	0,086	0,145	0,172	0,173	0,156	0,122	0,080	0,044	0,012
		w_6	0,007	0,023	0,051	0,083	0,111	0,133	0,141	0,126	0,081
	0,20	w_4	0,093	0,171	0,232	0,270	0,283	0,265	0,224	0,159	0,082
		w_5	0,090	0,158	0,202	0,219	0,208	0,169	0,116	0,061	0,017
		w_6	0,004	0,020	0,035	0,061	0,090	0,114	0,126	0,117	0,078
	0,10	w_4	0,096	0,180	0,250	0,302	0,326	0,311	0,263	0,190	0,099
		w_5	0,093	0,169	0,224	0,255	0,252	0,211	0,154	0,078	0,023
		w_6	0,002	0,018	0,026	0,047	0,074	0,100	0,113	0,111	0,076
	0,05	w_4	0,098	0,187	0,266	0,330	0,366	0,356	0,304	0,221	0,116
		w_5	0,096	0,178	0,245	0,289	0,298	0,256	0,182	0,097	0,028
		w_6	0,002	0,008	0,018	0,035	0,058	0,085	0,105	0,105	0,074
0,40	1,00	w_4	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,136	0,096	0,050
		w_5	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_6	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_4	0,092	0,160	0,202	0,227	0,226	0,204	0,166	0,119	0,062
		w_5	0,088	0,146	0,171	0,177	0,157	0,125	0,079	0,041	0,012
		w_6	0,006	0,023	0,050	0,080	0,111	0,133	0,141	0,125	0,081
	0,20	w_4	0,094	0,174	0,235	0,272	0,278	0,257	0,212	0,151	0,078
		w_5	0,091	0,161	0,207	0,223	0,206	0,165	0,111	0,057	0,016
		w_6	0,004	0,016	0,036	0,062	0,092	0,117	0,128	0,118	0,078

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 4.3 (continuare)

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	0,10	w_4	0,096	0,182	0,255	0,304	0,316	0,294	0,245	0,175	0,091
		w_5	0,094	0,173	0,213	0,259	0,245	0,198	0,136	0,071	0,021
		w_6	0,002	0,011	0,025	0,048	0,077	0,104	0,114	0,113	0,076
	0,05	w_4	0,099	0,189	0,270	0,330	0,349	0,328	0,275	0,196	0,105
		w_5	0,096	0,182	0,251	0,292	0,283	0,233	0,160	0,084	0,024
		w_6	0,001	0,007	0,018	0,036	0,063	0,092	0,110	0,109	0,075
	1,00	w_4	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,135	0,096	0,050
		w_5	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_6	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_4	0,091	0,162	0,201	0,227	0,225	0,202	0,166	0,117	0,061
		w_5	0,087	0,153	0,168	0,177	0,156	0,121	0,080	0,041	0,012
		w_6	0,007	0,023	0,053	0,081	0,120	0,134	0,140	0,124	0,080
0,35	0,20	w_4	0,095	0,175	0,236	0,269	0,272	0,249	0,205	0,145	0,076
		w_5	0,091	0,163	0,206	0,220	0,200	0,158	0,108	0,057	0,016
		w_6	0,004	0,015	0,036	0,063	0,094	0,118	0,130	0,116	0,078
	0,10	w_4	0,099	0.186	0 257	0,299	0,307	0,283	0,234	0,167	0,087
		w_5	0,093	0,173	0,230	0,253	0,239	0,190	0,129	0,067	0,020
		w_6	0,002	0,009	0,024	0,049	0,079	0,106	0,121	0,111	0,077
	0,05	w_4	0,100	0,192	0,272	0,323	0,334	0,310	0,258	0,184	0,096
		w_5	0,095	0,182	0,249	0,283	0,268	0,217	0,148	0,076	0,024
		w_6	0,002	0,005	0,016	0,037	0,067	0,096	0,114	0,110	0,076
0,30	1,00	w_4	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,136	0,096	0,050
		w_5	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_6	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 4.3 (continuare)

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0.7	0,8	0,9
0,30	0,50	w_4	0,090	0,161	0,204	0,224	0,222	0,199	0,164	0,115	0,060
		w_5	0,086	0,148	0,173	0,175	0,154	0,119	0,080	0,040	0,011
		w_6	0,007	0,022	0,051	0,081	0,112	0,134	0,139	0,125	0,080
	0,20	w_4	0,094	0,175	0,235	0,265	0,265	0,241	0,198	0,140	0,072
		w_5	0,092	0,165	0,210	0,218	0,203	0,154	0,103	0,053	0,015
		w_6	0,004	0,015	0,035	0,064	0,092	0,120	0,131	0,119	0,079
	0,10	w_4	0,097	0,184	0,254	0,290	0,293	0,268	0,220	0,156	0,081
		w_5	0,096	0,176	0,233	0,247	0,224	0,177	0,119	0,061	0,017
		w_6	0,002	0,010	0,026	0,053	0,084	0,103	0,124	0,116	0,078
	0,05	w_4	0,098	0,190	0,268	0,310	0,316	0,290	0,247	0,170	0,088
		w_5	0,098	0,185	0,252	0,272	0,251	0,199	0,134	0,069	0,020
		w_6	0,001	0,006	0,018	0,043	0,073	0,102	0,118	0,113	0,077
0,25	1,00	w_4	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,136	0,096	0,050
		w_5	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_6	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_4	0,090	0,160	0,202	0,222	0,218	0,197	0,160	0,112	0,059
		w_5	0,086	0,146	0,172	0,174	0,152	0,119	0,078	0,039	0,012
		w_6	0,007	0 024	0 052	0,082	0,113	0,134	0,140	0,124	0,080
	0,20	w_4	0,096	0,178	0,231	0,257	0,256	0,231	0,189	0,133	0,069
		w_5	0,093	0,163	0,204	0,210	0,187	0,146	0,097	0,056	0,014
		w_6	0,004	0,014	0,038	0,067	0,098	0,123	0,132	0,121	0,078
	0,10	w_4	0,099	0,185	0,246	0,277	0,277	0,252	0,205	0,146	0,075
		w_5	0,096	0,173	0,224	0,233	0,208	0,164	0,109	0,056	0,016
		w_6	0,001	0,009	0,029	0,057	0,089	0,113	0,125	0,118	0,075
	0,05	w_5	0,101	0,192	0,260	0,296	0,298	0,271	0,222	0,158	0,082
		w_5	0,101	0,183	0,242	0,252	0,232	0,179	0,121	0,063	0,018
		w_6	0,001	0,004	0,021	0,047	0,079	0,108	0,122	0,115	0,077
0,20	1,00	w_4	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,136	0,096	0,050
		w_5	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_6	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081

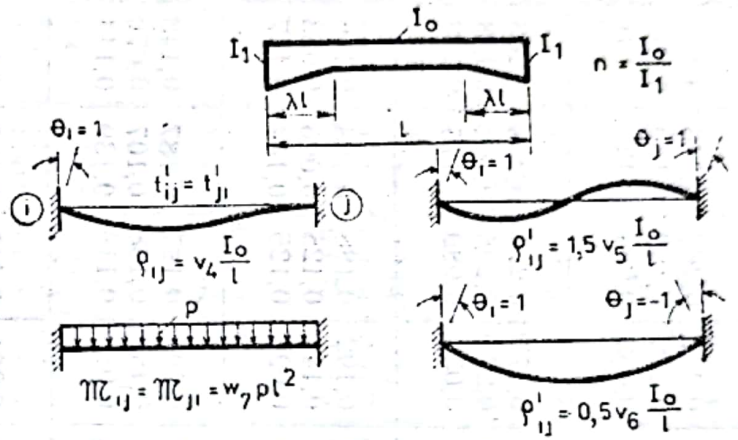
Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 4.3 (continuare)

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,20	0,50	w_4	0,091	0,162	0,201	0,219	0,215	0,192	0,157	0,111	0,057
		w_5	0,087	0,149	0,171	0,171	0,149	0,114	0,075	0,039	0,011
		w_6	0,006	0,022	0,052	0,084	0,114	0,136	0,141	0,125	0,080
	0,20	w_4	0,095	0,174	0,225	0,247	0,243	0,219	0,179	0,126	0,065
		w_5	0,093	0,164	0,198	0,200	0,176	0,136	0,090	0,046	0,013
		w_6	0,003	0,016	0,040	0,071	0,102	0,126	0,135	0,122	0,080
	0,10	w_4	0,097	0,182	0,239	0,264	0,260	0,236	0,193	0,136	0,071
		w_5	0,096	0,175	0,215	0,218	0,193	0,150	0,100	0,051	0,015
		w_6	0,002	0,011	0,033	0,063	0,095	0,120	0,131	0,120	0,079
	0,05	w_4	0,098	0,189	0,249	0,277	0,274	0,248	0,203	0,144	0,074
		w_5	0,098	0,183	0,229	0,234	0,208	0,162	0,108	0,055	0,016
		w_6	0,001	0,007	0,027	0,056	0,089	0,115	0,128	0,118	0,078
0,10	1,00	w_4	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,136	0,096	0,050
		w_5	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_6	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_4	0,089	0,160	0,187	0,202	0,197	0,187	0,143	0,101	0,053
		w_5	0,085	0,140	0,162	0,159	0,138	0,107	0,070	0,036	0,010
		w_6	0,007	0,026	0,056	0,089	0,119	0,139	0,144	0,126	0,081
	0,20	w_4	0,094	0,164	0,205	0,221	0,217	0,195	0,158	0,111	0,057
		w_5	0,092	0,152	0,176	0,174	0,152	0,117	0,077	0,039	0,011
		w_6	0,004	0,021	0,049	0,082	0,112	0,134	0,141	0,125	0,080
	0,10	w_6	0,096	0,169	0,212	0,229	0,225	0,202	0,164	0,116	0,060
		w_5	0,095	0,158	0,184	0,182	0,159	0,122	0,081	0,041	0,012
		w_6	0,003	0,018	0,045	0,078	0,109	0,132	0,139	0,124	0,080
	0,05	w_4	0,098	0,172	0,217	0,235	0,231	0,207	0,169	0,119	0,061
		w_5	0,097	0,163	0,191	0,189	0,165	0,127	0,084	0,043	0,012
		w_6	0,001	0,015	0,042	0,075	0,106	0,129	0,137	0,123	0,080

Scanned with OKEN Scanner

Coeficienţii v_4, v_5, v_6, t', w_7



Tabelul 4.4

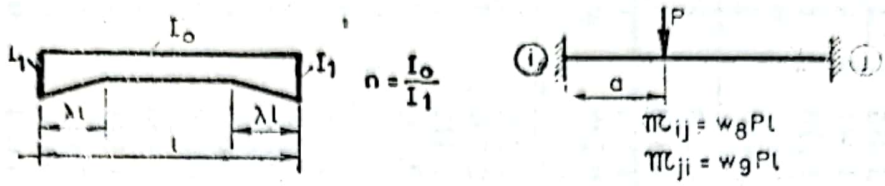
λ	n	1,000	0,800	0,600	0,400	0,300	0,200	0,150	0,125	0,100	0,080	0,060	0,040
0,50	v_4	1,000	1,167	1,423	1,889	2,313	3,085	3,803	4,339	5,077	5,998	7,428	10,083
	v_5	1,000	1,183	1,472	1,997	2,487	3,393	4,252	4,895	5,791	6,918	8,681	11,992
	v_6	1,000	1,118	1,286	1,572	1,792	2,160	2,456	2,672	2,934	3,238	3,670	4,356
	t'	0,500	0,521	0,548	0,586	0,613	0,650	0,677	0,692	0,711	0,730	0,753	0,784
	w_7	0,083	0,086	0,089	0,093	0,095	0,098	0,101	0,102	0,104	0,106	0,107	0,110
0,40	v_4	1,000	1,147	1,369	1,756	2,092	2,682	3,193	3,564	4,071	4,658	5,519	7,029
	v_5	1,000	1,166	1,419	1,873	2,275	2,991	3,623	4,085	4,723	5,465	6,560	8,505
	v_6	1,000	1,090	1,218	1,404	1,544	1,754	1,904	2,002	2,116	2,236	2,396	2,600
	t'	0,500	0,525	0,555	0,600	0,631	0,673	0,702	0,719	0,740	0,760	0,783	0,815
	w_7	0,083	0,086	0,089	0,094	0,097	0,101	0,103	0,105	0,106	0,108	0,110	0,112

Scanned with OKEN Scanner

0,35	v_4	1,000	1,137	1,338	1,674	1,964	2,449	2,839	3,151	3,514	3,957	4,543	5,541
	v_5	1,000	1,157	1,389	1,787	2,137	2,733	3,215	3,607	4,067	4,630	5,376	6,668
	v_6	1,000	1,078	1,186	1,336	1,446	1,596	1,710	1,784	1,856	1,938	2,044	2,160
	t'	0,500	0,526	0,557	0,601	0,632	0,674	0,699	0,717	0,736	0,755	0,775	0,805
	w_7	0,083	0,086	0,089	0,094	0,097	0,100	0,103	0,105	0,106	0,107	0,109	0,111
0,30	v_4	1,000	1,122	1,299	1,588	1,825	2,205	2,507	2,711	2,981	3,262	3,655	4,242
	v_5	1,000	1,141	1,347	1,692	1,979	2,447	2,825	3,081	3,422	3,779	4,281	5,037
	v_6	1,000	1,066	1,154	1,376	1,362	1,478	1,554	1,600	1,658	1,710	1,776	1,858
	t'	0,500	0,525	0,556	0,598	0,627	0,665	0,690	0,705	0,722	0,738	0,757	0,781
	w_7	0,083	0,086	0,089	0,094	0,096	0,100	0,102	0,103	0,105	0,106	0,108	0,110
0,25	v_4	1,000	1,108	1,258	1,491	1,679	1,944	2,168	2,308	2,492	2,655	2,893	3,226
	v_5	1,000	1,126	1,301	1,581	1,811	2,137	2,415	2,593	2,826	3,030	3,333	3,764
	v_6	1,000	1,054	1,128	1,222	1,282	1,364	1,426	1,454	1,490	1,530	1,574	1,614
	t'	0,500	0,524	0,552	0,590	0,618	0,649	0,671	0,685	0,701	0,712	0,728	0,750
	w_7	0,083	0,086	0,089	0,093	0,095	0,099	0,101	0,102	0,103	0,104	0,105	0,107
0,20	v_4	1,000	1,090	1,212	1,394	1,529	1,724	1,863	1,953	2,061	2,165	2,300	2,477
	v_5	1,000	1,105	1,250	1,469	1,661	1,876	2,048	2,160	2,295	2,426	2,596	3,115
	v_6	1,000	1,044	1,098	1,168	1,214	1,268	1,308	1,332	1,360	1,382	1,412	1,446
	t'	0,500	0,521	0,547	0,581	0,603	0,632	0,649	0,659	0,670	0,681	0,693	0,708
	w_7	0,083	0,086	0,089	0,092	0,094	0,097	0,098	0,099	0,100	0,101	0,102	0,104
0,15	v_4	1,000	1,070	1,161	1,288	1,385	1,512	1,593	1,643	1,716	1,769	1,826	1,928
	v_5	1,000	1,082	1,191	1,344	1,463	1,618	1,718	1,780	1,873	1,937	2,009	2,136
	v_6	1,000	1,034	1,070	1,120	1,152	1,194	1,218	1,232	1,246	1,264	1,278	1,304
	t'	0,500	0,517	0,539	0,565	0,584	0,605	0,618	0,625	0,637	0,643	0,650	0,662
	w_7	0,083	0,085	0,088	0,090	0,092	0,094	0,095	0,096	0,097	0,098	0,099	0,100
0,10	v_4	1,000	1,049	1,110	1,191	1,245	1,314	1,360	1,385	1,416	1,445	1,479	1,521
	v_5	1,000	1,058	1,131	1,129	1,295	1,379	1,435	1,465	1,504	1,539	1,581	1,633
	v_5	1,000	1,022	1,046	1,076	1,096	1,129	1,134	1,144	1,152	1,162	1,170	1,184
	t'	0,500	0,513	0,529	0,548	0,560	0,574	0,583	0,587	0,593	0,598	0,604	0,611
	w_7	0,083	0,085	0,087	0,088	0,090	0,091	0,092	0,093	0,093	0,094	0,094	0,095
0,00	v_4	1,000	1,100	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	v_5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	v_6	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	t'	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
	w_7	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083

Scanned with OKEN Scanner

Coeficienții w_8, w_9



Tabelul 4.5

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,50	1,00	w_8	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_9	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_8	0,084	0,138	0,161	0,159	0,139	0,108	0,070	0,035	0,013
		w_9	0,013	0,035	0,070	0,108	0,139	0,159	0,161	0,138	0,084
	0,20	w_8	0,088	0,149	0,181	0,175	0,158	0,115	0,069	0,032	0,008
		w_9	0,008	0,032	0,069	0,115	0,158	0,175	0,181	0,149	0,088
	0,10	w_8	0,092	0,158	0,194	0,202	0,171	0,120	0,070	0,030	0,007
		w_9	0,007	0,030	0,070	0,120	0,171	0,202	0,194	0,158	0,092
	0,05	w_8	0,096	0,168	0,211	0,223	0,191	0,128	0,073	0,029	0,008
		w_9	0,008	0,029	0,073	0,128	0,191	0,223	0,211	0,168	0,096
0,40	1,00	w_8	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_9	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_8	0,085	0,140	0,165	0,166	0,141	0,105	0,065	0,031	0,008
		w_9	0,008	0,031	0,065	0,105	0,141	0,166	0,165	0,140	0,085
	0,20	w_8	0,090	0,152	0,189	0,191	0,161	0,115	0,067	0,030	0,007
		w_9	0,007	0,030	0,067	0,115	0,161	0,191	0,189	0,152	0,090
	0,10	w_8	0,092	0,161	0,204	0,211	0,174	0,117	0,065	0,028	0,006
		w_9	0,006	0,028	0,065	0,117	0,174	0,211	0,204	0,161	0,092
	0,05	w_8	0,094	0,171	0,221	0,232	0,186	0,116	0,060	0,024	0,005
		w_9	0,005	0,024	0,060	0,116	0,186	0,232	0,221	0,171	0,094
0,35	1,00	w_8	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_9	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_8	0,085	0,140	0,167	0,165	0,141	0,104	0,065	0,033	0,009
		w_9	0,009	0,033	0,065	0,104	0,141	0,165	0,167	0,140	0,085
	0,20	w_8	0,090	0,154	0,198	0,191	0,160	0,112	0,067	0,029	0,008
		w_9	0,008	0,020	0,067	0,112	0,160	0,191	0,189	0,154	0,090
	0,10	w_8	0,091	0,162	0,208	0,120	0,172	0,114	0,063	0,028	0,008
		w_9	0,008	0,028	0,063	0,114	0,172	0,210	0,208	0,162	0,091
	0,05	w_8	0,093	0,171	0,222	0,229	0,181	0,111	0,057	0,021	0,005
		w_9	0,005	0,021	0,057	0,111	0,181	0,229	0,222	0,171	0,093

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 4.5 (continuare)

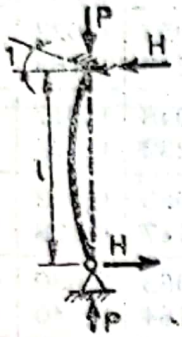
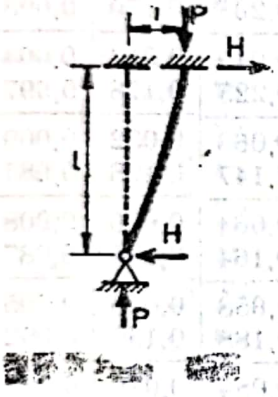
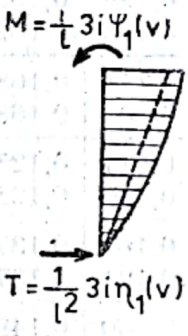
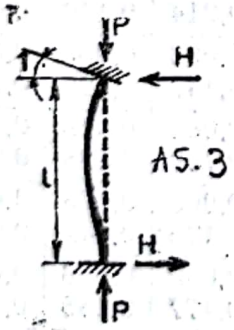
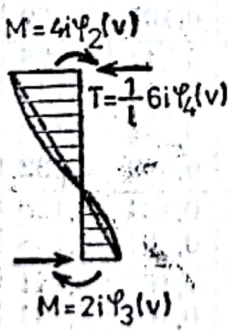
λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,30	1,00	w_8	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_9	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_8	0,085	0,142	0,167	0,165	0,140	0,104	0,063	0,032	0,008
		w_9	0,008	0,032	0,063	0,104	0,140	0,165	0,167	0,142	0,085
	0,20	w_8	0,090	0,157	0,194	0,190	0,157	0,109	0,062	0,027	0,006
		w_9	0,006	0,027	0,062	0,109	0,157	0,190	0,194	0,157	0,090
	0,10	w_8	0,093	0,168	0,213	0,209	0,167	0,109	0,055	0,022	0,005
		w_9	0,005	0,022	0,055	0,109	0,167	0,209	0,213	0,168	0,093
	0,05	w_8	0,096	0,178	0,232	0,227	0,175	0,107	0,048	0,017	0,004
		w_9	0,004	0,017	0,048	0,107	0,175	0,227	0,232	0,178	0,096
0,25	1,00	w_8	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_9	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_8	0,086	0,140	0,164	0,162	0,139	0,102	0,063	0,030	0,008
		w_9	0,008	0,030	0,063	0,102	0,139	0,162	0,164	0,140	0,086
	0,20	w_8	0,092	0,157	0,188	0,184	0,153	0,108	0,061	0,025	0,006
		w_9	0,006	0,025	0,061	0,108	0,153	0,184	0,188	0,157	0,092
	0,10	w_8	0,093	0,170	0,205	0,198	0,162	0,108	0,054	0,020	0,005
		w_9	0,005	0,020	0,054	0,108	0,162	0,198	0,205	0,170	0,093
	0,05	w_8	0,097	0,176	0,225	0,218	0,168	0,104	0,049	0,017	0,004
		w_9	0,004	0,017	0,049	0,104	0,168	0,218	0,225	0,176	0,097
0,20	1,00	w_8	0,081	0,128	0,147	0,414	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_9	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_8	0,087	0,143	0,164	0,161	0,137	0,101	0,064	0,030	0,008
		w_9	0,008	0,030	0,064	0,101	0,137	0,161	0,164	0,143	0,087
	0,20	w_8	0,092	0,159	0,188	0,180	0,149	0,105	0,058	0,023	0,005
		w_9	0,005	0,023	0,058	0,105	0,149	0,180	0,188	0,159	0,092
	0,10	w_8	0,095	0,171	0,202	0,192	0,155	0,105	0,054	0,018	0,003
		w_9	0,003	0,018	0,054	0,105	0,155	0,192	0,202	0,171	0,095
	0,05	w_8	0,097	0,179	0,214	0,202	0,160	0,105	0,050	0,014	0,002
		w_9	0,002	0,014	0,050	0,105	0,160	0,202	0,214	0,179	0,097
0,10	1,00	w_8	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_9	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_8	0,087	0,138	0,159	0,154	0,132	0,099	0,061	0,029	0,007
		w_9	0,007	0,029	0,061	0,099	0,132	0,154	0,159	0,138	0,087
	0,20	w_8	0,091	0,149	0,170	0,164	0,138	0,101	0,060	0,026	0,005
		w_9	0,005	0,026	0,060	0,101	0,138	0,164	0,170	0,149	0,091
	0,10	w_8	0,094	0,155	0,177	0,169	0,141	0,101	0,059	0,023	0,003
		w_9	0,003	0,023	0,059	0,101	0,141	0,169	0,177	0,155	0,094
	0,05	w_8	0,096	0,159	0,182	0,173	0,143	0,101	0,058	0,021	0,002
		w_9	0,002	0,021	0,058	0,101	0,143	0,173	0,182	0,159	0,096

Scanned with OKEN Scanner

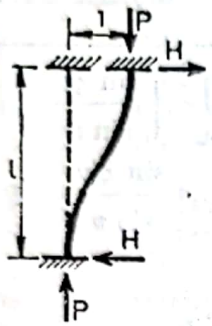
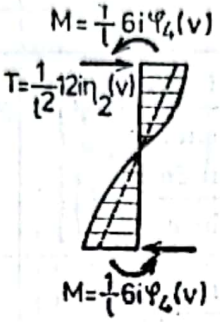
ANEXA 5

EFORTURI ÎN BARELE TIP ALE SISTEMULUI DE BAZĂ AL METODEI DEPLASĂRILOR

Tabelul 5.1

Bara	Eforturi	Funcţii de corecţie
		$\varphi_1(v) = \dfrac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)}$
		$\eta_1(v) = \varphi_1(v) - \dfrac{v^2}{3}$
		$\varphi_2(v) = \dfrac{1}{4} \dfrac{v(\operatorname{tg} v - v)}{\operatorname{tg} v \left(2 \operatorname{tg} \dfrac{v}{2} - v\right)}$ $\varphi_3(v) = \dfrac{1}{2} \dfrac{v(v - \sin v)}{\sin v \left(2 \operatorname{tg} \dfrac{v}{2} - v\right)}$ $\varphi_4(v) = \dfrac{1}{6} \dfrac{v^2 \operatorname{tg} \dfrac{v}{2}}{2 \operatorname{tg} \dfrac{v}{2} - v}$

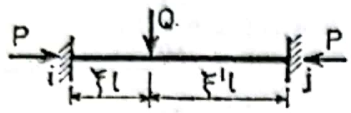
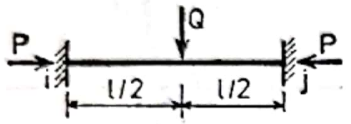
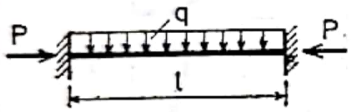
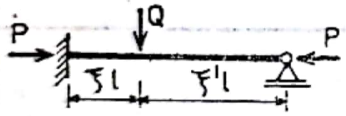
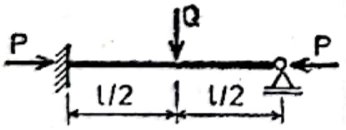
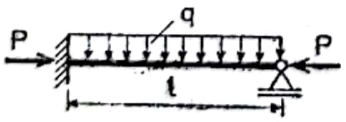
Scanned with OKEN Scanner

Bara	Eforturi	Funcţii de corecţie
		$\eta_2(v) = \varphi_4(v) - \frac{v^2}{12} = \frac{v^3}{12\left(2\,\mathrm{tg}\,\frac{v}{2} - v\right)}$
	$T = \frac{P \cdot 1}{l} = \frac{i \cdot v^2}{l^2}$	—

Scanned with OKEN Scanner

MOMENTE DE ÎNCASTRARE PERFECTĂ LA BARE ÎNCĂRCATE TRANSVERSAL ȘI AXIAL

Tabelul 5.2

Bara	M_i	M_j
	$\mathfrak{M}_i = Ql\,\frac{4}{v^2}\left[\varphi_2\left(\frac{\sin \xi' v}{\sin v} - \xi'\right) + - \frac{1}{2}\,\varphi_3\left(\frac{\sin \xi v}{\sin v} - \xi\right)\right]$	$\mathfrak{M}_j = Ql\,\frac{4}{v^2}\left[\varphi_2\left(\frac{\sin \xi v}{\sin v} - \xi\right) - - \frac{1}{2}\,\varphi_3\left(\frac{\sin \xi' v}{\sin v} - \xi'\right)\right]$
	$\mathfrak{M}_i = \frac{Ql}{8}\,\gamma(v)$ $\gamma(v) = \frac{16}{v^2}\left(\frac{1}{\cos\frac{v}{2}} - 1\right)\cdot \left(\varphi_2 - \frac{1}{2}\,\varphi_3\right)$	$\mathfrak{M}_j = \frac{Ql}{8}\,\gamma(v)$
	$\mathfrak{M}_i = \frac{ql^2}{12}\,\gamma_1(v)$ $\gamma_1(v) = \frac{48}{v^3}\left(\operatorname{tg}\frac{v}{2} - \frac{v}{2}\right)\cdot \left(\varphi_2 - \frac{1}{2}\,\varphi_3\right)$	$\mathfrak{M}_j = \frac{ql^2}{12}\,\gamma_1(v)$
	$\mathfrak{M}_i = 3Ql\,\frac{\varphi_1}{v^2}\left(\frac{\sin \xi' v}{\sin v} - \xi'\right)$	—
	$\mathfrak{M}_i = \frac{3Ql}{16}\,\gamma_2(v)$ $\gamma_2(v) = 8\,\frac{\varphi_1}{v^2}\left(\frac{1}{\cos\frac{v}{2}} - 1\right)$	—
	$\mathfrak{M}_i = \frac{ql}{8}\,\gamma_3(v)$ $\gamma_3(v) = 24\,\frac{\varphi_1}{v_3}\left(\operatorname{tg}\frac{v}{2} - \frac{v}{2}\right)$	—

Scanned with OKEN Scanner

ANEXA 6

Funcțiile trigonometrice tg v și cotg v, argumentul fiind exprimat în radiani

v	tg v	cotg v	v	tg v	cotg v
0,01	0,01000	100,00000	0,41	0,43463	2,30080
0,02	0,02000	50,00000	0,42	0,44657	2,23929
0,03	0,03001	33,32222	0,43	0,45862	2,18045
0,04	0,04002	24,98750	0,44	0,47078	2,12413
0,05	0,05504	19,98401	0,45	0,48306	2,07013
0,06	0,06007	16,64724	0,46	0,49545	2,01836
0,07	0,07011	14,26330	0,47	0,50797	1,96862
0,08	0,08017	12,47349	0,48	0,52061	1,92082
0,09	0,09024	11,08156	0,49	0,53339	1,87480
0,10	0,10033	9,96710	0,50	0,54130	1,84740
0,11	0,11045	9,05387	0,51	0,55936	1,78775
0,12	0,12058	8,29324	0,52	0,57256	1,74654
0,13	0,13074	7,64876	0,53	0,58592	1,70670
0,14	0,14092	7,09622	0,54	0,59943	1,66825
0,15	0,15114	6,61638	0,55	0,61311	1,63102
0,16	0,16138	6,19655	0,56	0,62695	1,59502
0,17	0,17166	5,82546	0,57	0,64097	1,56013
0,18	0,18197	5,49541	0,58	0,65517	1,52632
0,19	0,19232	5,19966	0,59	0,66956	1,49351
0,20	0,20271	4,93315	0,60	0,68414	1,46168
0,21	0,21314	4,69175	0,61	0,69892	1,43077
0,22	0,22362	4,47187	0,62	0,71391	1,40073
0,23	0,23414	4,27094	0,63	0,72911	1,37153
0,24	0,24472	4,08630	0,64	0,74454	1,34311
0,25	0,25534	3,91634	0,65	0,76020	1,31544
0,26	0,26602	3,75911	0,66	0,77610	1,28849
0,27	0,27676	3,61323	0,67	0,79225	1,26222
0,28	0,28755	3,47765	0,68	0,80866	1,23661
0,29	0,29841	3,35109	0,69	0,82534	1,21162
0,30	0,30934	3,23268	0,70	0,84229	1,18723
0,31	0,32033	3,12178	0,71	0,85984	1,16342
0,32	0,33139	3,01759	0,72	0,87707	1,14015
0,33	0,34252	2,91953	0,73	0,89492	1,11741
0,34	0,35374	2,82693	0,74	0,91309	1,09518
0,35	0,36503	2,73950	0,75	0,93160	1,07342
0,36	0,37640	2,65674	0,76	0,95045	1,05213
0,37	0,38786	2,57824	0,77	0,96967	1,03127
0,38	0,39941	2,50369	0,78	0,98926	1,01085
0,39	0,41105	2,43279	0,79	1,00925	0,99083
0,40	0,42279	2,36524	0,80	1,02964	0,97121

Scanned with OKEN Scanner

v	tg v	cotg v	v	tg v	cotg v
0,81	1,05046	0,95196	1,26	3,11327	0,32120
0,82	1,07171	0,93308	1,27	3,22363	0,31020
0,83	1,09343	0,91455	1,28	3,34135	0,29928
0,84	1,11963	0,89315	1,29	3,46721	0,28841
0,85	1,13833	0,87847	1,30	3,60210	2,27761
0,86	1,16156	0,86091	1,31	3,74708	0,26687
0,87	1,18532	0,84365	1,32	3,90335	0,25619
0,88	1,20966	0,82667	1,33	4,07231	0,24556
0,89	1,23460	0,80997	1,34	4,25562	0,23498
0,90	1,26016	0,79355	1,35	4,45522	0,22445
0,91	1,28637	0,77738	1,36	4,67344	0,21397
0,92	1,31326	0,76146	1,37	4,91306	0,20353
0,93	1,34087	0,74578	1,38	5,17744	0,19314
0,94	1,36923	0,73033	1,39	5,47069	0,18279
0,95	1,39838	0,71511	1,40	5,79788	0,17247
0,96	1,42836	0,70010	1,41	6,16536	0,16219
0,97	1,45920	0,68530	1,42	6,58112	0,15194
0,98	1,49096	0,67070	1,43	7,05546	0,14173
0,99	1,52368	0,65630	1,44	7,60183	0,13154
1,00	1,55741	0,64209	1,45	8,23809	0,12138
1,01	1,59221	0,62805	1,46	8,98861	0,11125
1,02	1,62813	0,61420	1,47	9,88737	0,10113
1,03	1,66524	0,60051	1,48	10,98238	0,09104
1,04	1,70361	0,58698	1,49	12,34986	0,08097
1,05	1,74332	0,57361	1,50	14,10142	0,07091
1,06	1,78442	0,56040	1,51	16,42809	0,06087
1,07	1,82703	0,54733	1,52	19,66953	0,05084
1,08	1,87122	0,53441	1,53	24,49841	0,04081
1,09	1,91709	0,52162	1,54	32,46114	0,03080
1,10	1,96476	0,50896	1,55	48,07848	0,02079
1,11	2,01434	0,49644	1,56	92,62050	0,01079
1,12	2,06506	0,48424	1,57	1255,7656	0,00079
1,13	2,11975	0,47175	1,58	−108,64920	−0,00920
1,14	2,17588	0,45958	1,59	−52,06697	−0,01920
1,15	2,23450	0,44752	1,60	−34,23253	−0,29021
1,16	2,29580	0,43557	1,61	−25,49475	−0,03922
1,17	2,35998	0,42373	1,62	−20,30728	−0,04924
1,18	2,42727	0,41198	1,63	−16,87110	−0,05927
1,19	2,49790	0,40033	1,64	−14,42703	−0,06931
1,20	2,57215	0,38877	1,65	−12,59926	−0,07936
1,21	2,65032	0,37731	1,66	−11,18055	−0,08944
1,22	2,73275	0,36593	1,67	−10,04718	−0,09953
1,23	2,81982	0,35463	1,68	−9,12077	−0,10963
1,24	2,91193	0,34341	1,69	−8,34923	−0,11977
1,25	3,00957	0,33227	1,70	−7,69660	−0,12992

Scanned with OKEN Scanner

v	tg v	cotg v	v	tg v	cotg v
1,71	−7,13726	−0,14010	2,16	−1,49610	−0,66480
1,72	−6,65244	−0,15032	2,17	−1,46420	−0,68296
1,73	−6,22810	−0,16056	2,18	−1,43321	−0,69773
1,74	−6,85353	−0,17083	2,19	−1,40310	−0,71270
1,75	−5,22038	−0,18114	2,20	−1,37382	−0,72789
1,76	−5,22209	−0,19149	2,21	−1,34534	−0,74330
1,77	−4,95341	−0,20186	2,22	−1,31761	−0,75894
1,78	−4,71009	−0,21231	2,23	−1,29061	−0,77482
1,79	−4,58866	−0,22278	2,24	−1,26429	−0,79095
1,80	−4,38626	−0,23330	2,25	−1,23863	−0,80734
1,81	−4,10050	−0,24387	2,26	−1,21359	−0,82400
1,82	−3,92937	−0,25449	2,27	−1,18916	−0,84092
1,83	−3,77118	−0,26516	2,28	−1,16530	−0,85814
1,84	−3,62449	−0,27590	2,29	−1,14200	−0,87565
1,85	−3,48806	−0,28669	2,30	−1,11921	−0,89348
1,86	−3,36083	−0,29754	2,31	−1,09694	−0,91162
1,87	−3,24187	−0,30846	2,32	−1,07514	−0,93011
1,88	−3,13038	−0,31945	2,33	−1,05381	−0,94893
1,89	−3,02567	−0,33050	2,34	−1,03292	−0,96811
1,90	−2,92710	−0,34163	2,35	−1,01247	−0,98768
1,91	−2,83414	−0,35284	2,36	−0,99242	−1,00763
1,92	−2,74630	−0,36412	2,37	−0,97276	−1,02800
1,93	−2,66316	−0,37549	2,38	−0,95349	−1,04877
1,94	−2,58433	−0,38694	2,39	−0,93458	−1,06999
1,95	−2,50948	−0,39848	2,40	−0,91601	−1,09169
1,96	−2,43828	−0,41012	2,41	−0,89779	−1,11384
1,97	−2,37048	−0,42185	2,42	−0,87989	−1,13650
1,98	−2,30582	−0,43368	2,43	−0,86230	−1,15968
1,99	−2,24408	−0,44561	2,44	−0,84501	−1,18341
2,00	−2,18504	−0,45765	2,45	−0,82802	−1,20770
2,01	−2,12853	−0,46980	2,46	−0,81130	−1,23258
2,02	−2,07437	−0,48207	2,47	−0,79485	−1,25809
2,03	−2,02242	−0,49445	2,48	−0,77866	−1,28425
2,04	−1,97252	−0,50696	2,49	−0,76272	−1,31109
2,05	−1,92456	−0,51959	2,50	−0,74702	−1,33865
2,06	−1,87841	−0,53236	2,51	−0,73156	−1,36694
2,07	−1,83396	−0,54526	2,52	−0,71632	−1,39602
2,08	−1,97111	−0,55831	2,53	−0,70129	−1,42594
2,09	−1,74977	−0,57150	2,54	−0,68848	−1,45247
2,10	−1,70985	−0,58484	2,55	−0,67186	−1,48804
2,11	−1,67127	−0,59834	2,56	−0,65745	−1,52102
2,12	−1,63396	−0,51201	2,57	−0,64322	−1,55467
2,13	−1,59785	−0,62584	2,58	−0,62917	−1,58939
2,14	−1,56288	−0,63984	2,59	−0,61530	−1,62522
2,15	−1,52898	−0,65403	2,60	−0,60160	−1,66223

Scanned with OKEN Scanner

v	tg v	cotg v	v	tg v	cotg v
2,61	−0,58806	−1,70050	3,06	−0,08177	− 12,22942
2,62	−0,57468	−1,74009	3,07	−0,07172	− 13,94311
2,63	−0,56145	−1,78110	3,08	−0,06167	− 16,21533
2,64	−0,54837	−1,82358	3,09	−0,05164	− 19,36483
2,65	−0,53544	−1,86762	3,10	−0,04162	− 24,02691
2,66	−0,52264	−1,91336	3,11	−0,03160	− 31,64556
2,67	−0,50997	−1,96089	3,12	−0,02160	− 46,29629
2,68	−0,49743	−2,01033	3,13	−0,01159	− 86,28127
2,69	−0,48502	−2,06177	3,14	−0,00159	−628,93081
2,70	−0,47273	−2,11537	3,15	0,00841	118,90606
2,71	−0,46055	−1,17131	3,16	0,01841	54,31830
2,72	−0,44848	−2,22975	3,17	0,02841	35,19887
2,73	−0,43653	−2,29079	3,18	0,03843	26,02133
2,74	−0,42467	−2,35476	3,19	0,04845	20,63983
2.75	−0,41292	−2,42177	3,20	0,05847	17,10166
2,76	−0,40126	−2,49214	3,21	0,06851	14,59640
2,77	−0,38970	−2,56607	3,22	0,07857	12,72750
2,78	−0,37822	−2,64396	3,23	0,08864	11,28158
2,79	−0,36783	−2,71864	3,24	0,09873	10,12863
2,80	−0,35553	−2,81270	3,25	0,10883	9,18864
2,81	−0,34431	−2,90435	3,26	0,11896	8,40618
2,82	−0,33316	−3,00158	3,27	0,12912	7,74473
2,83	−0,32208	−3,10481	3,28	0,13940	7,17360
2,84	−0,31108	−3,21460	3,29	0,14951	6,68851
2,85	−0,30015	−3,33166	3,30	0,15975	6,25978
2,86	−0,28928	−3,45685	3,31	0,17002	5,88166
2,87	−0,27847	−3,59105	3,32	0,18033	5,54538
2,88	−0,26773	−3,73510	3,33	0,19067	5,24466
2,89	−0,25704	−3,89044	3,34	0,20105	4,97388
2,90	−0,24641	−4,05827	3,35	0,21148	4,72857
2,91	−0,23582	−4,24052	3,36	0,22195	4,50551
2,92	−0,22529	−4,43872	3,37	0,23246	4,30181
2,93	−0,21481	−4,65527	3,38	0,24303	4,11471
2,94	−0,20437	−4,89308	3,39	0,25365	3,94244
2,95	−0,19397	−5,15543	3,40	0,26432	3,78329
2,96	−0,18362	−5,44602	3,41	0,27504	3,63583
2,97	−0,17330	−5,77034	3,42	0,28583	3,49858
2,98	−0,16301	−6,13459	3,43	0,29668	3,37063
2,99	−0,15276	−6,54621	3,44	0,30759	3,25108
3,00	−0,14255	−7,01508	3,45	0,31857	3,13902
3,01	−0,13236	−7,55515	3,46	0,32962	3,03379
3,02	−0,12220	−8,18330	3,47	0,34075	2,93470
3,03	−0,11206	−8,92379	3,48	0,35195	2,84131
3,04	−0,10194	−9,80969	3,49	0,36322	2,75315
3,05	−0,09185	−10,88731	3,50	0,37459	2,66958

Scanned with OKEN Scanner

v	tg v	cotg v	v	tg v	cotg v
3,51	0,38603	2,59047	3,96	1,06830	0,93606
3,52	0,39757	2,51528	3,97	1,08994	0,91748
3,53	0,40919	2,44385	3,98	1,11206	0,89923
3,54	0,42092	2,37574	3,99	1,13468	0,88130
3,55	0,43274	2,31085	4,00	1,15782	0,86369
3,56	0,44466	2,24890	4,01	1,18150	0,84638
3,57	0,45669	2,18966	4,02	1,20575	0,82935
3,58	0,46884	2,13892	4,03	1,23059	0,81261
3,59	0,48109	2,07861	4,04	1,25604	0,79612
3,60	0,49378	2,02646	4,05	1,28215	0,77993
3,61	0,50596	1,97644	4,06	1,30893	0,76398
3,62	0,51859	1,92830	4,07	1,33643	0,74826
3,63	0,53134	1,88203	4,08	1,36467	0,73277
3,64	0,54424	1,83742	4,09	1,39369	0,71751
3,65	0,55727	1,79446	4,10	1,42353	0,70247
3,66	0,57045	1,75300	4,11	1,45423	0,68764
3,67	0,58378	1,71297	4,12	1,48584	0,67301
3,68	0,59727	1,67428	4,13	1,51840	0,65858
3,69	0,61092	1,63687	4,14	1,55197	0,64434
3,70	0,62473	1,60069	4,15	1,58659	0,63028
3,71	0,63872	1,56563	4,16	1,62233	0,61639
3,72	0,65289	1,53165	4,17	1,65925	0,60268
3,73	0,66725	1,49868	4,18	1,69742	0,58912
3,74	0,68180	1,46670	4,19	1,73690	0,57573
3,75	0,69655	1,43564	4,20	1,77778	0,56249
3,76	0,71151	1,40546	4,21	1,82014	0,54940
3,77	0,72668	1,37612	4,22	1,86407	0,53646
3,78	0,74207	1,34758	4,23	1,90967	0,52365
3,79	0,75769	1,31980	4,24	1,95704	0,51097
3,80	0,77356	1,29272	4,25	2,00631	0,49842
3,81	0,78967	1,26636	4,26	2,05759	0,48600
3,82	0,80603	1,24064	4,27	2,11103	0,47370
3,83	0,82266	1,21556	4,28	2,16677	0,46151
3,84	0,83957	1,19108	4,29	2,22499	0,44944
3,85	0,85676	1,16718	4,30	2,28585	0,43747
3,86	0,87425	1,14383	4,31	2,34956	0,42561
3,87	0,89205	1,12101	4,32	2,41633	0,41385
3,88	0,91017	1,09869	4,33	2,48642	0,40218
3,89	0,92863	1,07685	4,34	2,56007	0,39061
3,90	0,94742	1,05548	4,35	2,63760	0,37913
3,91	0,96658	1,03457	4,36	2,71933	0,36773
3,92	0,98612	1,01407	4,37	2,80562	0,35642
3,93	1,00604	0,99399	4,38	2,89690	0,34519
3,94	1,02636	0,97431	4,39	2,99363	0,33404
3,95	1,04711	0,95500	4,40	3,09632	0,32296

Scanned with OKEN Scanner

v	tg v	cotg v	v	tg v	cotg v
4,41	3,20558	0,31195	4,86	−6,72529	−0,14869
4,42	3,32208	0,30101	4,87	−6,29211	−0,15892
4,43	3,44658	0,29014	4,88	−5,91022	−0,16919
4,44	3,57997	0,27933	4,89	−5,57095	−0,17950
4,45	3,72372	0,26858	4,90	−5,26749	−0,18984
4,46	3,87765	0,25788	4,91	−4,99440	−0,20022
4,47	4,04449	0,24724	4,92	−4,74730	−0,21064
4,48	4,22539	0,23666	4,93	−4,52259	−0,22111
4,49	4,42225	0,22612	4,94	−4,31733	−0,23162
4,50	4,63733	0,21564	4,95	−4,12906	−0,24218
4,51	4,87333	0,20519	4,96	−3,95572	−0,25279
4,52	5,13351	0,19479	4,97	−3,79557	−0,26346
4,53	5,42186	0,18443	4,98	−3,64713	−0,27418
4,54	5,74326	0,17411	4,99	−3,50915	−0,28496
4,55	6,01383	0,16383	5,00	−3,38052	−0,29581
4,56	6,51128	0,11357	5,01	−3,26030	−0,30672
4,57	6,97549	0,14335	5,02	−3,14769	−0,31769
4,58	7,50932	0,13316	5,03	−3,04192	−0,32873
4,59	8,12983	0,12300	5,04	−2,94241	−0,33985
4,60	8,86017	0,11286	5,05	−2,84859	−0,35105
4,61	9,73252	0,10274	5,06	−2,75996	−0,36232
4,62	10,79300	0,09265	5,07	−2,67610	−0,37367
4,63	12,11010	0,08257	5,08	−2,59661	−0,38511
4,64	12,79010	0,07251	5,09	−2,52114	−0,39664
4,65	16,00770	0,06246	5,10	−2,44939	−0,40826
4,66	19,07050	0,05243	5,11	−2,38107	−0,41997
4,67	23,57690	0,04241	5,12	−2,31592	−0,43179
4,68	30,86390	0,03240	5,13	−2,25372	−0,44371
4,69	44,65740	0,02239	5,14	−2,19427	−0,45573
4,70	80,71276	0,01237	5,15	−2,13737	−0,46786
4,71	418,58700	0,00238	5,16	−2,08285	−0,48011
4,72	−131,38600	0,00761	5,17	−2,03055	−0,49247
4,73	−56,77680	−0,01761	5,18	−1,98034	−0,50496
4,74	−36,20820	−0,02761	5,19	−1,93208	−0,51757
4,75	−26,57540	−0,03762	5,20	−1,88564	−0,53032
4,76	−20,98770	−0,04764	5,21	−1,84093	−0,54320
4,77	−17,33860	−0,05767	5,22	−1,79783	−0,55622
4,78	−14,76790	−0,06771	5,23	−1,75625	−0,56939
4,79	−12,85890	−0,07776	5,24	−1,71611	−0,58271
4,80	−11,38490	−0,08783	5,25	−1,67733	−0,59618
4,81	−10,2122	−0,09792	5,26	−1,63982	−0,60982
4,82	−9,25683	−0,10802	5,27	−1,60352	−0,62362
4,83	−8,46336	−0,11815	5,28	−1,56837	−0,63760
4,84	−7,79373	−0,12830	5,29	−1,53431	−0,65175
4,85	−7,22093	−0,13848	5,30	−1,50127	−0,66610

Scanned with OKEN Scanner

v	tg v	cotg v	v	tg v	cotg v
5,31	−1,46922	−0,68063	5,76	−0,57680	−1,73370
5,32	−1,43809	−0,69536	5,77	−0,56355	−1,77446
5,33	−1,40784	−0,71030	5,78	−0,55045	−1,81169
5,34	−1,37843	−0,72546	5,79	−0,53749	−1,86049
5,35	−1,34982	−0,74083	5,80	−0,52467	−1,90595
5,36	−1,32198	−0,75644	5,81	−0,51198	−1,95320
5,37	−1,29486	−0,77228	5,82	−0,49942	−2,00232
5,38	−1,26844	−0,78836	5,83	−0,48699	−2,05343
5,39	−1,24267	−0,80471	5,84	−0,47468	−2,10668
5,40	−1,21754	−0,82132	5,85	−0,46248	−2,16225
5,41	−1,19301	−0,83821	5,86	−0,45040	−2,22024
5,42	−1,16907	−0,85538	5,87	−0,43842	−2,28091
5,43	−1,14567	−0,87285	5,88	−0,42655	−2,34439
5,44	−1,12281	−0,89062	5,89	−0,41478	−2,41091
5,45	−1,10045	−0,90871	5,90	−0,40311	−2,48071
5,46	−1,07858	−0,92714	5,91	−0,39153	−2,55408
5,47	−1,05718	−0,94591	5,92	−0,38004	−2,63130
5,48	−1,03622	−0,96504	5,93	−0,36864	−2,71267
5,49	−1,01570	−0,98454	5,94	−0,35732	−2,79861
5,50	−0,99558	−1,00443	5,95	−0,34609	−2,88942
5,51	−0,97587	−1,02473	5,96	−0,33493	−2,98569
5,52	−0,95653	−1,04544	5,97	−0,32384	−3,08794
5,53	−0,93756	−1,06659	5,98	−0,31289	−3,19601
5,54	−0,91895	−1,08816	5,99	−0,30189	−3,31246
5,55	−0,90067	−1,11028	6,00	−0,29101	−3,43630
5,56	−0,88272	−1,13286	6,01	−0,28019	−3,56900
5,57	−0,86508	−1,15596	6,02	−0,26944	−3,71140
5,58	−0,84775	−1,17959	6,03	−0,25874	−5,86488
5,59	−0,83071	−1,20378	6,04	−0,24810	−4,03063
5,60	−0,81394	−1,22859	6,05	−0,23751	−4,21034
5,61	−0,79745	−1,25399	6,06	−0,22697	−4,40586
5,62	−0,78122	−1,28004	6,07	−0,21647	−4,61957
5,63	−0,76524	−1,30677	6,08	−0,20603	−4,85366
5,64	−0,74951	−1,33420	6,09	−0,15962	−5,11195
5,65	−0,73400	−1,36239	6,10	−0,18526	−5,39781
5,66	−0,71873	−1,39134	6,11	−0,17494	−5,71624
5,67	−0,70367	−1,42112	6,12	−0,16465	−6,07348
5,68	−0,68882	−1,45175	6,13	−0,15439	−6,47710
5,69	−0,67418	−1,48328	6,14	−0,14417	−6,93625
5,70	−0,65973	−1,51577	6,15	−0,13398	−7,46380
5,71	−0,64547	−1,54925	6,16	−0,12381	−8,07689
5,72	−0,63140	−1,58378	6,17	−0,11367	−8,79739
5,73	−0,61750	−1,61943	6,18	−0,10355	−9,65717
5,74	−0,60377	−1,65625	6,19	−0,09346	−10,69970
5,75	−0,59020	−1,69434	6,20	−0,08338	−11,99328

Scanned with OKEN Scanner

v	tg v	cotg v	v	tg v	cotg v
6,21	−0,07332	−13,63884	6,25	−0,03320	− 30,12048
6,22	−0,06327	−15,80527	6,26	−0,02319	− 43,12203
6,23	−0,05324	−18,78287	6,27	−0,01319	− 75,81501
6,24	−0,04321	−23,14279	6,28	−0,003185	−313,97174

Scanned with OKEN Scanner

ANEXA 7

Valorile funcţiilor φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, η_1 şi η_2 utilizate în metoda deplasărilor

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,10	0,9987	0,9991	1,0004	0,9996	0,9930	0,9975
0,20	0,9973	0,9980	1,0009	0,9992	0,9840	0,9959
0,30	0,9936	0,9962	1,0016	0,9983	0,9636	0,9868
0,40	0,9895	0,9945	1,0026	0,9973	0,9362	0,9848
0,42	0,9882	0,9940	1,0028	0,9970	0,9294	0,9831
0,44	0,9870	0,9934	1,0030	0,9968	0,9224	0,9805
0,46	0,9858	0,9929	1,0035	0,9966	0,9153	0,9796
0,48	0,9847	0,9924	1,0039	0,9964	0,9079	0,9763
0,50	0,9833	0,9919	1,0043	0,9962	0,8999	0,9753
0,52	0,9818	0,9912	1,0048	0,9957	0,8916	0,9732
0,54	0,9804	0,9907	1,0052	0,9955	0,8832	0,9705
0,56	0,9789	0,9901	1,0056	0,9953	0,8744	0,9692
0,58	0,9773	0,9891	1,0059	0,9947	0,8652	0,9667
0,60	0,9756	0,9881	1,0061	0,9936	0,8557	0,9636
0,62	0,9740	0,9870	1,0064	0,9933	0,8458	0,9613
0,64	0,9724	0,9862	1,0067	0,9931	0,8358	0,9585
0,66	0,9706	0,9857	1,0072	0,9928	0,8254	0,9568
0,68	0,9687	0,9842	1,0076	0,9921	0,8145	0,9535
0,70	0,9668	0,9835	1,0081	0,9917	0,8035	0,9509
0,72	0,9649	0,9828	1,0090	0,9915	0,7921	0,9483
0,74	0,9629	0,9818	1,0094	0,9910	0,7804	0,9453
0,76	0,9608	0,9807	1,0099	0,9905	0,7683	0,9423
0,78	0,9587	0,9798	1,0108	0,9900	0,7559	0,9393
0,80	0,9566	0,9787	1,0111	0,9895	0,7432	0,9362
0,82	0,9543	0,9774	1,0114	0,9888	0,7302	0,9327
0,84	0,9517	0,9762	1,0121	0,9883	0,7165	0,9294
0,86	0,9496	0,9751	1,0126	0,9876	0,7030	0,9260
0,88	0,9472	0,9739	1,0132	0,9870	0,6890	0,9225
0,90	0,9447	0,9726	1,0136	0,9863	0,6747	0,9188
0,92	0,9421	0,9714	1,0144	0,9858	0,6599	0,9152
0,94	0,9395	0,9701	1,0150	0,9851	0,6450	0,9114
0,96	0,9368	0,9689	1,0158	0,9848	0,6296	0,9080
0,98	0,9341	0,9675	1,0164	0,9838	0,6140	0,9038
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,01	0,9299	0,9655	1,0176	0,9829	0,5899	0,8979
1,02	0,9285	0,9648	1,0179	0,9825	0,5817	0,8959
1,03	0,9270	0,9641	1,0183	0,9822	0,5734	0,8938
1,04	0,9256	0,9634	1,0187	0,9818	0,5650	0,8917

Scanned with OKEN Scanner

ANEXA 7

Valorile funcţiilor φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, η_1 şi η_2 utilizate în metoda deplasărilor

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,10	0,9987	0,9991	1,0004	0,9996	0,9930	0,9975
0,20	0,9973	0,9980	1,0009	0,9992	0,9840	0,9959
0,30	0,9936	0,9962	1,0016	0,9983	0,9636	0,9868
0,40	0,9895	0,9945	1,0026	0,9973	0,9362	0,9848
0,42	0,9882	0,9940	1,0028	0,9970	0,9294	0,9831
0,44	0,9870	0,9934	1,0030	0,9968	0,9224	0,9805
0,46	0,9858	0,9929	1,0035	0,9966	0,9153	0,9796
0,48	0,9847	0,9924	1,0039	0,9964	0,9079	0,9763
0,50	0,9833	0,9919	1,0043	0,9962	0,8999	0,9753
0,52	0,9818	0,9912	1,0048	0,9957	0,8916	0,9732
0,54	0,9804	0,9907	1,0052	0,9955	0,8832	0,9705
0,56	0,9789	0,9901	1,0056	0,9953	0,8744	0,9692
0,58	0,9773	0,9891	1,0059	0,9947	0,8652	0,9667
0,60	0,9756	0,9881	1,0061	0,9936	0,8557	0,9636
0,62	0,9740	0,9870	1,0064	0,9933	0,8458	0,9613
0,64	0,9724	0,9862	1,0067	0,9931	0,8358	0,9585
0,66	0,9706	0,9857	1,0072	0,9928	0,8254	0,9568
0,68	0,9687	0,9842	1,0076	0,9921	0,8145	0,9535
0,70	0,9668	0,9835	1,0081	0,9917	0,8035	0,9509
0,72	0,9649	0,9828	1,0090	0,9915	0,7921	0,9483
0,74	0,9629	0,9818	1,0094	0,9910	0,7804	0,9453
0,76	0,9608	0,9807	1,0099	0,9905	0,7683	0,9423
0,78	0,9587	0,9798	1,0108	0,9900	0,7559	0,9393
0,80	0,9566	0,9787	1,0111	0,9895	0,7432	0,9362
0,82	0,9543	0,9774	1,0114	0,9888	0,7302	0,9327
0,84	0,9517	0,9762	1,0121	0,9883	0,7165	0,9294
0,86	0,9496	0,9751	1,0126	0,9876	0,7030	0,9260
0,88	0,9472	0,9739	1,0132	0,9870	0,6890	0,9225
0,90	0,9447	0,9726	1,0136	0,9863	0,6747	0,9188
0,92	0,9421	0,9714	1,0144	0,9858	0,6599	0,9152
0,94	0,9395	0,9701	1,0150	0,9851	0,6450	0,9114
0,96	0,9368	0,9689	1,0158	0,9848	0,6296	0,9080
0,98	0,9341	0,9675	1,0164	0,9838	0,6140	0,9038
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,01	0,9299	0,9655	1,0176	0,9829	0,5899	0,8979
1,02	0,9285	0,9648	1,0179	0,9825	0,5817	0,8959
1,03	0,9270	0,9641	1,0183	0,9822	0,5734	0,8938
1,04	0,9256	0,9634	1,0187	0,9818	0,5650	0,8917

Scanned with OKEN Scanner

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
1,05	0,9240	0,9627	1,0190	0,9815	0,5565	0,8896
1,06	0,9226	0,9620	1,0194	0,9811	0,5480	0,8875
1,07	0,9210	0,9613	1,0198	0,9808	0,5394	0,8853
1,08	0,9195	0,9605	1,0202	0,9804	0,5307	0,8831
1,09	0,9180	0,9598	1,0206	0,9801	0,5220	0,8810
1,10	0,9164	0,9590	1,0209	0,9798	0,5131	0,8789
1,11	0,9148	0,9583	1,0214	0,9793	0,5041	0,8766
1,12	0,9132	0,9575	1,0218	0,9789	0,4951	0,8744
1,13	0,9116	0,9567	1,0222	0,9784	0,4859	0,8721
1,14	0,9100	0,9559	1,0226	0,9781	0,4768	0,6898
1,15	0,9083	0,9551	1,0230	0,9777	0,4675	0,8675
16	0,9066	0,9543	1,0234	0,9773	0,4581	0,8652
17	0,9049	0,9536	1,0238	0,9770	0,4486	0,8629
18	0,9032	0,9527	1,0242	0,9766	0,4391	0,8605
19	0,9015	0,9519	1,0247	0,9762	0,4295	0,8582
1,20	0,8998	0,9511	1,0251	0,9756	0,4198	0,8557
21	0,8981	0,9503	1,0255	0,9752	0,4101	0,8533
22	0,8963	0,9495	1,0260	0,9748	0,4002	0,8509
23	0,8945	0,9485	1,0264	0,9745	0,3902	0,8484
24	0,8927	0,9477	1,0269	0,9741	0,3802	0,8459
1,25	0,8909	0,9469	1,0274	0,9737	0,3701	0,8435
26	0,8890	0,9460	1,0279	0,9733	0,3598	0,8410
27	0,8871	0,9451	1,0283	0,9728	0,3495	0,8384
28	0,8852	0,9442	1,0288	0,9724	0,3391	0,8359
29	0,8833	0,8433	1,0293	0,9720	0,3287	0,8333
1,30	0,8814	0,9424	1,0298	0,9715	0,3181	0,8307
31	0,8795	0,9415	1,0303	0,9711	0,3075	0,8281
32	0,8776	0,9405	1,0307	0,9706	0,2968	0,8254
33	0,8756	0,9396	1,0312	0,9701	0,2860	0,8227
34	0,8736	0,9387	1,0317	0,9697	0,2751	0,8201
1,35	0,8716	0,9378	1,0322	0,9693	0,2641	0,8174
36	0,8696	0,9368	1,0327	0,9688	0,2531	0,8146
37	0,8676	0,9359	1,0332	0,9683	0,2420	0,8119
38	0,8655	0,9349	1,0538	0,9678	0,2307	0,8091
39	0,8634	0,9336	1,0342	0,9673	0,2194	0,8063
1,40	0,8613	0,9392	1,0348	0,9669	0,2080	0,8035
41	0,8592	0,9320	1,0353	0,9664	0,1965	0,8007
42	0,8571	0,9310	1,0358	0,9659	0,1849	0,7979
43	0,8550	0,9300	1,0364	0,9654	0,1733	0,7950
44	0,8528	0,9282	1,0369	0,9649	0,1616	0,7921

Scanned with OKEN Scanner

Anexa 7 (continuare)

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
1,45	0,8506	0,9279	1,0375	0,9644	0,1498	0,7892
46	0,8484	0,9269	1,0380	0,9639	0,1379	0,7863
47	0,8462	0,9258	1,0386	0,9634	0,1258	0,7833
48	0,8439	0,9249	1,0391	0,9629	0,1138	0,7804
49	0,8416	0,9238	1,0397	0,9624	0,1016	0,7774
1,50	0,8393	0,9226	1,0403	0,9619	0,0893	0,7743
51	0,8370	0,9217	1,0407	0,9614	0,0770	0,7714
52	0,8347	0,9206	1,0415	0,9609	0,0646	0,7683
53	0,8323	0,9194	1,0421	0,9604	0,0520	0,7625
54	0,8299	0,9183	1,0426	0,9598	0,0394	0,7621
1,55	0,8275	0,9174	1,0432	0,9592	0,0267	0,7590
56	0,8215	0,9162	1,0438	0,9587	0,0139	0,7559
57	0,8227	0,9151	1,0441	0,9582	0,0011	9,7528
$0,5\pi$	0,8215	0,9149	1,0445	0,9581	0	0,7525
58	0,8203	0,9140	1,0450	0,9577	−0,0118	0,7496
59	0,8178	0,9129	1,0456	0,9571	−0,0249	0,7464
1,60	0,8153	0,9116	1,0463	0,9566	−0,0380	0,7432
61	0,8127	0,9105	1,0469	0,9560	−0,0512	0,7400
62	0,8201	0,9093	1,0475	0,9554	−0,0647	0,7367
63	0,8076	0,9081	1,0482	0,9548	−0,0780	0,7334
64	0,8050	0,9071	1,0489	0,9543	−0,0915	0,7302
1,65	0,8024	0,9058	1,0495	0,9537	−0,1051	0,7269
66	0,7998	0,9046	1,0502	0,9531	−0,1187	0,7235
67	0,7972	0,9035	1,0508	0,9526	−0,1324	0,7202
68	0,7945	0,9022	1,0515	0,9520	−0,1463	0,7168
69	0,7918	0,9010	1,0522	0,9515	−0,1602	0,7136
1,70	0,7891	0,8998	1,0529	0,9509	−0,1742	0,7100
71	0,7863	0,8985	1,0535	0,9503	−0,1884	0,7065
72	0,7835	0,8973	1,0542	0,9497	−0,2026	0,7031
73	0,7807	0,8961	1,0549	0,9491	−0,2169	0,6996
74	0,7779	0,8948	1,0556	0,9484	−0,2313	0,6961
1,75	0,7751	0,8936	1,0563	0,9478	−0,2457	0,6926
76	0,7723	0,8923	1,0571	0,9472	−0,2602	0,6891
77	0,7695	0,8910	1,0577	0,9466	−0,2748	0,6855
78	0,7667	0,8897	1,0585	0,9460	−0,2894	0,6819
79	0,7638	0,8884	1,0592	0,9454	−0,3042	0,6783
1,80	0,7609	0,8871	1,0600	0,9448	−0,3191	0,6747
81	0,7580	0,8858	1,0606	0,9442	−0,3340	0,6711
82	0,7550	0,8845	1,0614	0,9435	−0,3491	0,6674
83	0,7520	0,8831	1,0622	0,9428	−0,3643	0,6637
84	0,7488	0,8818	1,0630	0,9422	−0,3797	0,6600

Scanned with OKEN Scanner

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
1,85	0,7457	0,8804	1,0637	0,9415	−0,3951	0,6563
86	0,7425	0,8791	1,0645	0,9409	−0,4107	0,6526
87	0,7383	0,8777	1,0653	0,9403	−0,4263	0,6488
88	0,7361	0,8763	1,0660	0,9396	−0,4420	0,6450
89	0,7329	0,8749	1,0668	0,9389	−0,4578	0,6412
1,90	0,7297	0,8735	1,0676	0,9382	−0,4736	0,6374
91	0,7265	0,8721	1,0684	0,9376	−0,4895	0,6335
92	0,7232	0,8707	1,0692	0,9369	−0,5056	0,6297
93	0,7199	0,8693	1,0701	0,9362	−0,5217	0,6258
94	0,7166	0,8678	1,0709	0,9355	−0,5379	0,6219
1,95	0,7133	0,8664	1,0717	0,9348	−0,5542	0,6180
96	0,7099	0,8650	1,0726	0,9341	−0,5706	0,6140
97	0,7065	0,8635	1,0734	0,9334	−0,5871	0,6100
98	0,7031	0,8620	1,0742	0,9327	−0,6037	0,6060
99	0,6996	0,8605	1,0751	0,9320	−0,6204	0,6020
2,00	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	−0,6372	0,5980
01	0,6926	0,8575	1,0768	0,9306	−0,6541	0,5940
02	0,6891	0,8560	1,0777	0,9299	−6,6710	0,5899
03	0,6855	0,8545	1,0786	0,9292	−0,6881	0,5858
04	0,6819	0,8530	1,0795	0,9285	−0,7053	0,5817
2,05	0,6783	0,8515	1,0804	0,9278	−0,7225	0,5776
06	0,6747	0,8499	1,0813	0,9270	−0,7398	0,5734
07	0,6710	0,8184	1,0822	0,9263	−0,7573	0,5692
08	0,6673	0,8468	1,0831	0,9255	−0,7749	0,5650
09	0,6635	0,8453	1,0840	0,9248	−0,7925	0,5608
2,10	0,6597	0,8437	1,0850	0,9240	−0,8103	0,5565
11	0,6559	0,8421	1,0859	0,9233	−0,8281	0,5523
12	0,6521	0,8405	1,0868	0,9225	−0,8460	0,5480
13	0,6482	0,8389	1,0877	0,9218	−0,8641	0,5437
14	0,6443	0,8372	1,0887	0,9210	−0,8822	0,5394
2,15	0,6404	0,8356	1,0897	0,9203	−0,9004	0,5351
16	0,6364	0,8339	1,0907	0,9195	−0,9188	0,5307
17	0,6324	0,8323	1,0917	0,9188	−0,9372	0,5264
18	0,6284	0,8306	1,0926	0,9180	−0,9557	0,5220
19	0,6243	0,8290	1,0936	0,9172	−0,9744	0,5176
2,20	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	−0,9931	0,5131
21	0,6161	0,8256	1,0956	0,9156	−1,0119	0,5086
22	0,6119	0,8239	1,0966	0,9148	−1,0309	0,5041
23	0,6077	0,8222	1,0977	0,9140	−1,0499	0,4996
24	0,6034	0,8204	1,0988	0,9132	−1,0691	0,4951

Scanned with OKEN Scanner

Anexa 7 (continuare)

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
2,25	0,5991	0,8187	1,0998	0,9124	—1,0884	0,4906
26	0,5948	0,8170	1,1009	0,9116	—1,1077	0,4859
27	0,5805	0,8152	1,1019	0,9108	—1,1271	0,4814
28	0,5861	0,8134	1,1029	0,9100	—1,1457	0,4768
29	0,5817	0,8117	1,1039	0,9092	—1,1662	0,4722
2,30	0,5772	0,8099	1,1050	0,9083	—1,1861	0,4675
31	0,5727	0,8081	1,1061	0,9075	—1,2060	0,4628
32	0,5681	0,8063	1,1072	0,9066	—1,2260	0,4581
33	0,5635	0,8045	1,1083	0,9058	—1,2461	0,4534
34	0,5589	0,8026	1,1095	0,9049	—1,2663	0,4486
2,35	0,5543	0,8008	1,1106	0,9041	—1,2865	0,4439
36	0,5496	0,7989	1,1117	0,9032	—1,3069	0,4391
37	0,5449	0,7971	1,1128	0,9024	—1,3274	0,4343
38	0,5402	0,7952	1,1140	0,9015	—1,3480	0,4295
39	0,5354	0,7934	1,1152	0,9007	—1,3686	0,4247
2,40	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	—1,3895	0,4198
41	0,5255	0,7896	1,1176	0,8990	—1,4105	0,4150
42	0,5205	0,7877	1,1188	0,8981	—1,4316	0,4101
43	0,5155	0,7858	1,1200	0,8972	—1,4528	0,4052
44	0,5105	0,7838	1,1212	0,8963	—1,4743	0,4002
2,45	0,5054	0,7819	1,1224	0,8954	—1,4954	0,3952
46	0,5003	0,7799	1,1236	0,8945	—1,5169	0,3902
47	0,4957	0,7780	1,1248	0,8936	—1,5385	0,3852
48	0,4899	0,7760	1,1261	0,8927	—1,5302	0,3802
49	0,4846	0,7740	1,1273	0,8918	—1,5821	0,3752
2,50	0,4793	0,7720	1,1286	0,8909	—1,6040	0,3701
51	0,4739	0,7700	1,1298	0,8900	—1,6261	0,3650
52	0,4685	0,7679	1,1311	0,8890	—1,6483	0,3598
53	0,4630	0,7659	1,1324	0,8880	—1,6706	0,3547
54	0,4576	0,7638	1,1337	0,8870	—1,6929	0,3495
2,55	0,4520	0,7618	1,1350	0,8860	—1,7155	0,3443
56	0,4464	0,7597	1,1363	0,8851	—1,7381	0,3391
57	0,4407	0,7576	1,1376	0,8842	—1,7609	0,3339
58	0,4350	0,7555	1,1390	0,8833	—1,7838	0,3287
59	0,4292	0,7534	1,1403	0,8824	—1,8068	0,3234
2,60	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	—1,8299	0,3181
61	0,4175	0,7492	1,1431	0,8805	—1,8532	0,3128
62	0,4116	0,7470	1,1445	0,8795	—1,8765	0,3075
63	0,4056	0,7449	1,1459	0,8786	—1,9000	0,3022
64	0,3996	0,7427	1,1473	0,8776	—1,9236	0,2968

Scanned with OKEN Scanner

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
2,65	0,3935	0,7405	1,1487	0,8766	−1,9473	0,2914
66	0,3873	0,7386	1,1501	0,8756	−1,9712	0,2860
67	0,3811	0,7361	1,1515	0,8746	−1,9952	0,2806
68	0,3748	0,7339	1,1530	0,8736	−2,0193	0,2751
69	0,3685	0,7317	1,1544	0,8726	−2,0435	0,2696
2,70	0,3621	0,7294	1,1559	0,8716	−2,0679	0,2641
71	0,3556	0,7272	1,1574	0,8706	−2,0924	0,2586
72	0,3491	0,7249	1,1589	0,8696	−2,1170	0,2531
73	0,3425	0,7227	1,1604	0,8686	−2,1418	0,2478
74	0,3358	0,7204	1,1619	0,8676	−2,1667	0,2420
2,75	0,3291	0,7181	1,1634	0,8666	−2,1917	0,2364
76	0,3223	0,7158	1,1650	0,8655	−2,2169	0,2307
77	0,3154	0,7135	1,1665	0,8645	−2,2422	0,2251
78	0,3085	0,7111	1,1681	0,8634	−2,2676	0,2194
79	0,3015	0,7088	1,1696	0,8624	−2,2932	0,2137
2,80	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	−2,3189	0,2080
81	0,2873	0,7040	1,1728	0,8603	−2,3447	0,2023
82	0,2801	0,7016	1,1744	0,8592	−2,3707	0,1965
83	0,2728	0,6992	1,1760	0,8582	−2,3969	0,1907
84	0,2654	0,6967	1,1777	0,8571	−2,4231	0,1849
2,85	0,2580	0,6943	1,1793	0,8561	−2,4495	0,1791
86	0,2505	0,6918	1,1810	0,8550	−2,4760	0,1733
87	0,2429	0,6894	1,1827	0,8539	−2,5027	0,1675
88	0,2352	0,6869	1,1844	0,8528	−2,5296	0,1616
89	0,2274	0,6844	1,1861	0,8517	−2,5566	0,1557
2,90	0,2195	0,6819	1,1878	0,8506	−2,5838	0,1498
91	0,2116	0,6794	1,1895	0,8495	−2,6111	0,1439
92	0,2036	0,6768	1,1913	0,8484	−2,6385	0,1379
93	0,1955	0,6743	1,1930	0,8473	−2,6661	0,1319
94	0,1873	0,6717	1,1948	0,8462	−2,6939	0,1259
2,95	0,1790	0,6691	1,1966	0,8451	−2,7218	0,1199
96	0,1706	0,6665	1,1984	0,8439	−2,7499	0,1138
97	0,1621	0,6639	1,2002	0,8428	−2,7782	0,1077
98	0,1535	0,6613	1,2020	0,8416	−2,8066	0,1016
99	0,1448	0,6587	1,2038	0,8405	−2,8352	0,0955
3,00	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	−2,8639	0,0893
01	0,1272	0,6533	1,2076	0,8382	−2,8928	0,0832
02	0,1182	0,6506	1,2095	0,8370	−2,9219	0,0770
03	0,1091	0,6479	1,2114	0,8359	−2,9512	0,0708
04	0,1000	0,6452	1,2133	0,8347	−2,9805	0,0646

Scanned with OKEN Scanner

Anexa 7 (continuare)

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
3,05	0,0906	0,6425	1,2152	0,8335	−3,0102	0,0583
06	0,0812	0,6398	1,2172	0,8323	−3,0400	0,0520
07	0,0717	0,6317	1,2192	0,8311	−3,0699	0,0457
08	0,0621	0,6343	1,2212	0,8299	−3,1001	0,0394
09	0,0523	0,6315	1,2232	0,8287	−3,1304	0,0331
3,10	0,0424	0,6287	1,2252	0,8275	−3,1609	0,0267
11	0,0324	0,6259	1,2272	0,8263	−3,1916	0,0203
12	0,0223	0,6230	1,2292	0,8251	−3,2225	0,0139
13	0,0121	0,6202	1,2313	0,8239	−3,2535	0,0075
14	0,0017	0,6173	1,2334	0,8227	−3,2848	0,0011
π	0,0	0,6168	1,2346	0,8224	−3,2998	0,0
3,15	−0,0088	0,6144	1,2355	0,8215	−3,3163	−0,0053
16	−0,0195	0,6115	1,2376	0,8203	−3,3480	−0,0118
17	−0,0303	0,6086	1,2397	0,8191	−3,3799	−0,0183
18	−0,0412	0,6057	1,2419	0,8178	−3,4120	−0,0249
19	−0,0523	0,6027	1,2441	0,8166	−3,4443	−0,0374
3,20	−0,0635	0,5997	1,2463	0,8153	−3,4768	−0,0380
21	−0,0749	0,5967	1,2485	0,8140	−3,5095	−0,0446
22	−0,0864	0,5937	1,2507	0,8127	−3,5425	−0,0512
23	−0,0981	0,5907	1,2529	0,8115	−3,5757	−0,0579
24	−0,1100	0,5876	1,2552	0,8102	−3,6092	−0,0646
3,25	−0,1220	0,5846	1,2574	0,8089	−3,6429	−0,0713
26	−0,1342	0,5815	1,2597	0,8076	−3,676	−0,0780
27	−0,1466	0,5784	1,2610	0,8063	−3,7109	−0,0847
28	−0,1591	0,5735	1,2644	0,8050	−3,7453	−0,0915
29	−0,1718	0,5722	1,2667	0,8037	−3,7799	−0,0983
3,30	−0,1847	0,5691	1,2691	0,8024	−3,8147	−0,1051
31	−0,1978	0,5660	1,2715	0,8011	−3,8498	−0,1119
32	−0,2111	0,5628	1,2739	0,7998	−3,8852	−0,1187
33	−0,2246	0,5596	1,2763	0,7985	−3,9208	−0,1225
34	−0,2383	0,5564	1,2788	0,7972	−3,9568	−0,1324
3,35	−0,2521	0,5532	1,2813	0,7959	−3,9930	−0,1393
36	−0,2663	0,5499	1,2838	0,7945	−4,0295	−0,1463
37	−0,2807	0,5466	1,2863	0,7932	−4,0662	−0,1532
38	−0,2952	0,5433	1,2889	0,7918	−4,1032	−0,1602
39	−0,3099	0,5400	1,2914	0,7905	−4,1405	−0,1672
3,40	−0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	−4,1781	−0,1742
41	−0,3400	0,5333	1,2966	0,7877	−4,2160	−0,1813
42	−0,3555	0,5299	1,2992	0,7863	−4,2543	−0,1884
43	−0,3713	0,5265	1,3018	0,7849	−4,2929	−0,1955
44	−0,3873	0,5231	1,3045	0,7835	−4,3318	−0,2026

Scanned with OKEN Scanner

Anexa 7 (continuare)

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
3,45	−0,4036	0,5197	1,3072	0,7821	−4,3711	−0,2097
46	−0,4202	0,5162	1,3099	0,7807	−4,4107	−0,2169
47	−0,4371	0,5127	1,3127	0,7793	−4,4507	−0,2240
48	−0,4542	0,5092	1,3155	0,7779	−4,4910	−0,2313
49	−0,4716	0,5057	1,3183	0,7765	−4,5317	−0,2385
3,50	−0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	−4,5727	−0,2457
51	−0,5075	0,4986	1,3241	0,7737	−4,6141	−0,2529
52	−0,5259	0,4950	1,3270	0,7723	−4,6560	−0,2602
53	−0,5447	0,4914	1,3299	0,7709	−4,6983	−0,2675
54	−0,5638	0,4878	1,3328	0,7695	−4,7410	−0,2748
3,55	−0,5833	0,4842	1,3357	0,7681	−4,7841	−0,2821
56	−0,6031	0,4805	1,3387	0,7667	−4,8276	−0,2894
57	−0,6233	0,4768	1,3417	0,7653	−4,8716	−0,2968
58	−0,6439	0,4731	1,3447	0,7638	−4,9160	−0,3042
59	−0,6649	0,4694	1,3477	0,7624	−4,9609	−0,3116
3,60	−0,6862	0,4656	1,3508	0,7609	−5,0062	−0,3191
61	−0,7080	0,4618	1,3539	0,7595	−5,0520	−0,3165
62	−0,7303	0,4580	1,3571	0,7580	−5,0984	−0,3340
63	−0,7531	0,4542	1,3603	0,7565	−5,1453	−0,3415
64	−0,7763	0,4503	1,3635	0,7550	−5,1928	−0,3491
3,65	−0,8001	0,4464	1,3667	0,7535	−5,2409	−0,3567
66	−0,8243	0,4425	1,3700	0,7520	−5,2895	−0,3643
67	−0,8491	0,4385	1,3733	0,7504	−5,3387	−0,3720
68	−0,8745	0,4345	1,3766	0,7488	−5,3886	−0,3797
69	−0,9005	0,4305	1,3800	0,7473	−5,4391	−0,3874
3,70	−0,9270	0,4265	1,3834	0,7457	−5,4903	−0,3951
71	−0,9541	0,4225	1,3868	0,7441	−5,5422	−0,4029
72	−0,9819	0,4184	1,3903	0,7425	−5,5947	−0,4107
73	−1,0074	0,4143	1,3938	0,7409	−5,6481	−0,4185
74	−1,0395	0,4102	1,3973	0,7393	−5,7020	−0,4263
3,75	−1,0693	0,4061	1,4008	0,7377	−5,7568	−0,4341
76	−1,0999	0,4019	1,4044	0,7361	−5,8124	−0,4420
77	−1,1342	0,3977	1,4080	0,7345	−5,8689	−0,4499
78	−1,1634	0,3935	1,4117	0,7329	−5,9262	−0,4578
79	−1,1964	0,3893	1,4154	0,7313	−5,9844	−0,4657
3,80	−1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	−6,0436	−0,4736
81	−1,2651	0,3807	1,4229	0,7281	−6,1038	−0,4815
82	−1,3009	0,3764	1,4267	0,7265	−6,1650	−0,4895
83	−1,3376	0,3721	1,4305	0,7249	−6,2272	−0,4975
84	−1,3754	0,3677	1,4344	0,7232	−6,2906	−0,5056

Scanned with OKEN Scanner

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
3,85	−1,4142	0,3633	1,4483	0,7216	−6,3551	−0,5136
86	−1,4543	0,3588	1,4423	0,7199	−6,4208	−0,5217
87	−1,4955	0,3543	1,4463	0,7183	−6,4878	−0,5298
88	−1,5380	0,3498	1,4503	0,7166	−6,5561	−0,5379
89	−1,5817	0,3453	1,4543	0,7150	−6,6257	−0,5460
3,90	−1,6268	0,3407	1,4584	0,7133	−6,6968	−0,5542
91	−1,6735	0,3361	1,4625	0,7116	−6,7695	−0,5620
92	−1,7214	0,3315	1,4667	0,7099	−6,8435	−0,5706
93	−1,7714	0,3268	1,4709	0,7082	−6,9196	−0,5788
94	−1,8227	0,3221	1,4752	0,7065	−6,9972	−0,5871
3,95	−1,8760	0,3174	1,4795	0,7048	−7,0768	−0,5954
96	−1,9310	0,3126	1,4838	0,7031	−7,1582	−0,6027
97	−1,9883	0,3078	1,4883	0,7014	−7,2418	−0,6120
98	−2,0473	0,3030	1,4928	0,6996	−7,3274	−0,6204
99	−2,1088	0,2982	1,4973	0,6979	−7,4155	−0,6288
4,00	−2,1726	0,2933	1,5018	0,6961	−7,5058	−0,6372
01	−2,2390	0,2884	1,5064	0,6944	−7,5990	−0,6456
02	−2,3074	0,2834	1,5110	0,6926	−7,6947	−0,6541
03	−2,3798	0,2784	1,5157	0,6909	−7,7934	−0,6625
04	−2,4547	0,2734	1,5204	0,6891	−7,8952	−0,6710
4,05	−2,5322	0,2683	1,5252	0,6873	−8,0002	−0,6795
06	−2,6142	0,2632	1,5301	0,6855	−8,1087	−0,6881
07	−2,6995	0,2581	1,5350	0,6857	−8,2211	−0,6967
08	−2,7888	0,2529	1,5400	0,6810	−8,3376	−0,7053
09	−2,8822	0,2477	1,5450	0,6801	−8,5482	−0,7139
4,10	−2,9806	0,2424	1,5501	0,6783	−8,5836	−0,7225
11	−3,0832	0,2371	1,5552	0,6765	−8,7139	−0,7311
12	−3,1915	0,2318	1,5604	0,6747	−8,8496	−0,7398
13	−3,3057	0,2264	1,5656	0,6729	−8,9913	−0,7485
14	−3,4262	0,2210	1,5709	0,6710	−9,1394	−0,7573
4,15	−3,5532	0,2156	1,5762	0,6692	−9,2940	−0,7661
16	−3,6877	0,2101	1,5816	0,6673	−9,4562	−0,7749
17	−3,8305	0,2043	1,5870	0,6654	−9,6268	−0,7837
18	−3,9824	0,1990	1,5925	0,6635	−9,8050	−0,7925
19	−4,1435	0,1934	1,5980	0,6616	−9,9955	−0,8014
4,20	−4,3155	0,1877	1,6036	0,6597	−10,196	−0,8103
21	−4,4996	0,1820	1,6093	0,6578	−10,408	−0,8192
22	−4,6970	0,1762	1,6150	0,6559	−10,633	−0,8281
23	−4,9087	0,1704	1,6208	0,6540	−10,873	−0,8370
24	−5,1369	0,1646	1,6267	0,6521	−11,129	−0,8460

Scanned with OKEN Scanner

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
4,25	−5,3841	0,1587	1,6327	0,6502	−11,405	−0,8550
26	−5,6516	0,1528	1,6387	0,6482	−11,701	−0,8641
27	−5,9427	0,1469	1,6448	0,6463	−12,020	−0,8731
28	−6,2607	0,1409	1,6510	0,6443	−12,367	−0,8822
29	−6,6100	0,1349	1,6573	0,6424	−12,745	−0,8913
4,30	−6,9949	0,1288	1,6637	0,6404	−13,158	−0,9004
31	−7,4210	0,1227	1,6702	0,6384	−13,613	−0,9096
32	−7,8956	0,1165	1,6767	0,6364	−14,116	−0,9188
33	−8,4288	0,1103	1,6833	0,6344	−14,678	−0,9280
34	−9,0306	0,1040	1,6899	0,6324	−15,309	−0,9372
4,35	−9,7154	0,0976	1,6966	0,6304	−16,023	−0,9464
36	−10,503	0,0912	1,7033	0,6284	−16,840	−0,9557
37	−11,416	0,0847	1,7101	0,6264	−17,782	−0,9650
38	−12,500	0,0781	1,7170	0,6243	−18,908	−0,9744
39	−13,772	0,0715	1,7240	0,6223	−20,196	−0,9837
4,40	−15,330	0,0648	1,7310	0,6202	−21,781	−0,9931
41	−17,254	0,0581	1,7382	0,6182	−23,736	−1,0025
42	−19,703	0,0513	1,7454	0,6161	−26,215	−1,0119
43	−22,923	0,0445	1,7527	0,6140	−29,468	−1,0214
44	−27,349	0,0376	1,7602	0,6119	−33,920	−1,0309
4,45	−33,818	0,0307	1,7678	0,6098	−40,419	−1,0404
46	−44,148	0,0237	1,7754	0,6077	−50,779	−1,0499
47	−63,306	0,0167	1,7831	0,6056	−69,964	−1,0595
48	−111,57	0,0096	1,7910	0,6034	−118,26	−1,0691
49	−378,64	0,0024	1,7990	0,6013	−445,36	−1,0798
4,50	+227,80	−0,0048	1,8070	0,5991	+221,05	−1,0884
51	—	−0,0121	1,8152	0,5970	—	−1,0980
52	—	−0,0194	1,8234	0,5948	—	−1,1077
53	—	−0,0268	1,8317	0,5927	—	−1,1174
54	—	−0,0343	1,8402	0,5905	—	−1,1271
4,55	—	−0,0419	1,8488	0,5883	—	−1,1369
56	—	−0,0495	1,8575	0,5861	—	−1,1457
57	—	−0,0572	1,8663	0,5839	—	−1,1565
58	—	−0,0650	1,8752	0,5817	—	−1,1663
59	—	−0,0729	1,8842	0,5795	—	−1,1762
4,60	—	−0,0808	1,8933	0,5772	—	−1,1861
61	—	−0,0888	1,9025	0,5750	—	−1,1960
62	—	−0,0969	1,9119	0,5727	—	−1,2060
63	—	−0,1051	1,9214	0,5704	—	−1,2160
64	—	−0,1133	1,9310	0,5681	—	−1,2260

Scanned with OKEN Scanner

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
4,65	—	−0,1270	1,9406	0,5658	—	−1,2360
66	—	−0,1301	1,9507	0,5635	—	−1,2461
67	—	−0,1386	1,9607	0,5612	—	−1,2562
68	—	−0,1472	0,9710	0,5589	—	−1,2663
69	—	−0,1559	0,9814	0,5567	—	−1,2764
4,70	—	−0,1646	1,9919	0,5543	—	−1,2865
71	—	−0,1734	2,0025	0,5520	—	−1,2967
$\frac{3\pi}{2}$	—	−0,1755	2,0052	0,5514	—	−1,2992
4,72	—	−0,1824	2,0134	0,5496	—	−1,3069
73	—	−0,1914	2,0244	0,5473	—	−1,3171
74	—	−0,2005	2,0355	0,5449	—	−1,3274
4,75	—	−0,2097	2,0468	0,5426	—	−1,3377
76	—	−0,2190	2,0582	0,5402	—	−1,3480
77	—	−0,2284	2,0698	0,5379	—	−1,3583
78	—	−0,2379	2,0816	0,5354	—	−1,3686
79	—	−0,2475	2,0935	0,5330	—	−1,3790
4,80	—	0,2572	2,1056	0,5304	—	−1,3895
81	—	−0,2670	2,1179	0,5280	—	−1,4000
82	—	−0,2770	2,1304	0,5255	—	−1,4105
83	—	−0,2871	2,1431	0,5230	—	−1,4210
84	—	−0,2973	2,1560	0,5250	—	−1,4316
4,85	—	−0,3076	2,1691	0,5180	—	−1,4422
86	—	−0,3181	2,1824	0,5155	—	−1,4528
87	—	−0,3287	2,1959	0,5130	—	−1,4634
88	—	−0,3395	2,2096	0,5105	—	−1,4740
89	—	−0,3503	2,2235	0,5080	—	−1,4847
4,90	—	−0,3612	2,2377	0,5054	—	−1,4954
91	—	−0,3722	2,2521	0,5029	—	−1,5061
92	—	−0,3834	2,2667	0,5003	—	−1,5169
93	—	−0,3947	2,2815	0,4977	—	−1,5277
94	—	−0,4061	2,2966	0,4951	—	−1,5385
4,95	—	−0,4176	2,3119	0,4925	—	−1,5493
96	—	−0,4293	2,3275	0,4899	—	−1,5602
97	—	−0,4411	2,3433	0,4873	—	−1,5711
98	—	−0,4530	2,3594	0,4846	—	−1,5821
99	—	−0,4650	2,3758	0,4820	—	−1,5930

Scanned with OKEN Scanner

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
5,00	—	−0,4772	2,3924	0,4793	—	−1,6040
01	—	−0,4896	2,4093	0,4766	—	−1,6150
02	—	−0,5022	2,4266	0,4739	—	−1,6261
03	—	−0,5150	2,4442	0,4712	—	−1,6372
04	—	−0,5280	2,4620	0,4685	—	−1,6483
5,05	—	−0,5412	2,4801	0,4658	—	−1,6594
06	—	−0,5545	2,4986	0,4630	—	−1,6706
07	—	−0,5680	2,5174	0,4603	—	−1,6817
08	—	−0,5818	2,5365	0,4576	—	−1,6929
09	—	−0,5958	2,5559	0,4548	—	−1,7042
5,10	—	−0,6100	2,5757	0,4520	—	−1,7155
11	—	−0,6243	2,5908	0,4492	—	−1,7268
12	—	−0,6388	2,6164	0,4464	—	−1,7381
13	—	−0,6535	2,6373	0,4436	—	−1,7495
14	—	−0,6685	2,6587	0,4407	—	−1,7609
5,15	—	−0,6837	2,6805	0,4379	—	−1,7723
16	—	−0,6991	2,7027	0,4350	—	−1,7838
17	—	−0,7147	2,7253	0,4321	—	−0,7953
18	—	−0,7306	2,7485	0,4292	—	−1,8068
19	—	−0,7467	2,7721	0,4263	—	−1,8183
5,20	—	−0,7630	2,7961	0,4234	—	−1,8299
21	—	−0,7796	2,8205	0,4205	—	−1,8415
22	—	−0,7964	2,8454	0,4175	—	−1,8532
23	—	−0,8135	2,8708	0,4146	—	−1,8648
24	—	−0,8310	2,8968	0,4116	—	−1,8765
5,25	—	−0,8488	2,9233	0,4086	—	−1,8882
26	—	−0,8668	2,9504	0,4056	—	−1,9000
27	—	−0,8852	2,9781	0,4026	—	−1,9118
28	—	−0,9039	3,0064	0,3996	—	−1,9236
29	—	−0,9228	3,0353	0,3966	—	−1,9354
5,30	—	−0,9423	3,0648	0,3935	—	−1,9473
31	—	−0,9618	4,0949	0,3904	—	−1,9592
32	—	−0,9821	3,1257	0,3873	—	−1,9712
33	—	−1,0023	3,1571	0,3842	—	−1,9832
34	—	−1,0233	3,1893	0,3811	—	−1,9952
5,35	—	−1,0442	3,2222	0,3780	—	−2,0072
36	—	−1,0660	3,2559	0,3748	—	−2,0193
37	—	−1,0878	3,2904	0,3717	—	−2,0314
38	—	−1,1103	3,3257	0,3685	—	−2,0435
39	—	−1,1331	3,3618	0,3664	—	−2,0557

Scanned with OKEN Scanner

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_{12}(v)$
5,40	—	—1,1563	3,3989	0,3621	—	—2,0679
41	—	—1,1801	3,4368	0,3589	—	—2,0801
42	—	—1,2043	3,4757	0,3556	—	—2,0924
43	—	—1,2292	3,5155	0,3524	—	—2,1047
44	—	—1,2544	3,5563	0,3491	—	—2,1170
5,45	—	—1,2802	3,5981	0,3458	—	—2,1294
46	—	—1,3067	3,6409	0,3425	—	—2,1418
47	—	—1,3336	3,6848	0,3392	—	—2,1542
48	—	—1,3612	3,7298	0,3358	—	—2,1667
49	—	—1,3894	3,7760	0,3325	—	—2,1792
5,50	—	—1,4181	3,8234	0,3291	—	—2,1917
51	—	—1,4476	3,8721	0,3257	—	—2,2043
52	—	—1,4777	3,9222	0,3223	—	—2,2169
53	—	—1,5088	3,9737	0,3189	—	—2,2295
54	—	—1,5402	4,0267	0,3154	—	—2,2422
5,55	—	—1,5729	4,0817	0,3120	—	—2,2549
56	—	—1,6059	4,1374	0,3085	—	—2,2676
57	—	—1,6402	4,1956	0,3050	—	—2,2804
58	—	—1,6751	4,2549	0,3015	—	—2,2932
59	—	—1,7112	4,3163	0,2980	—	—2,3060
5,60	—	—1,7481	4,3794	0,2944	—	—2,3189
61	—	—1,7860	4,4445	0,2909	—	—2,3318
62	—	—1,8250	4,5118	0,2873	—	—2,3447
63	—	—1,8649	4,5808	0,2837	—	—2,3577
64	—	—1,9060	4,6526	0,2801	—	—2,3707
5,65	—	—1,9484	4,7261	0,2764	—	—2,3838
66	—	—1,9920	4,8026	0,2727	—	—2,3969
67	—	—2,0370	4,8812	0,2691	—	—2,4100
68	—	—2,0833	4,9629	0,2654	—	—2,4231
69	—	—2,1310	5,0472	0,2617	—	—2,4363
5,70	—	—2,1804	5,1346	0,2580	—	—2,4495
71	—	—2,2312	5,2252	0,2543	—	—2,4627
72	—	—2,2838	5,3190	0,2505	—	—2,4760
73	—	—2,3382	5,4163	0,2467	—	—2,4893
74	—	—2,3944	5,5173	0,2429	—	—2,5027
5,75	—	—2,4526	5,6223	0,2391	—	—2,5161
76	—	—2,5130	5,7314	0,2352	—	—2,5296
77	—	—2,5754	5,8448	0,2313	—	—2,5431
78	—	—2,6406	5,9628	0,2274	—	—2,5566
79	—	—2,7076	6,0857	0,2235	—	—2,5702

Scanned with OKEN Scanner

Anexa 7 (continuare)

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
5,80	—	−2,7777	6,2140	0,2195	—	−2,5838
81	—	−2,8504	6,3476	0,2156	—	−2,5974
82	—	−2,9262	6,4873	0,2116	—	−2,6111
83	—	−3,0052	6,6332	0,2076	—	−2,6248
84	—	−3,0876	6,7859	0,2036	—	−2,6385
5,85	—	−3,1736	6,9455	0,1996	—	−2,6523
86	—	−3,2634	7,1132	0,1955	—	−2,6661
87	—	−3,3575	7,2891	0,1914	—	−2,6800
88	—	−3,4563	7,4738	0,1873	—	−2,6939
89	—	−3,5594	7,6681	1,1832	—	−2,7078
5,90	—	−3,6678	7,8726	0,1790	—	−2,7218
91	—	−3,7820	8,0884	0,1748	—	−2,7358
92	—	−3,9020	8,3160	0,1706	—	−2,7499
93	—	−4,0290	8,5570	0,1664	—	−2,7640
94	—	−4,1603	8,8122	0,1621	—	−2,7782
5,95	—	−4,3047	9,0830	0,1578	—	−2,7924
96	—	−4,4547	9,3706	0,1535	—	−2,8066
97	—	−4,6136	9,6769	0,1492	—	−2,8209
98	—	−4,7816	10,004	0,1448	—	−2,8352
99	—	−4,9656	10,353	0,1405	—	−2,8495
6,00	—	−5,1589	10,727	0,1367	—	−2,8639
01	—	−5,3668	11,129	0,1317	—	−2,8783
02	—	−5,5845	11,561	0,1272	—	−2,8928
03	—	−5,8298	12,020	0,1227	—	−2,9073
04	—	−6,0653	12,534	0,1182	—	−2,9219
6,05	—	−6,3705	13,084	0,1137	—	−2,9365
06	—	−6,6753	13,683	0,1091	—	−2,9512
07	—	−7,0120	14,339	0,1045	—	−2,9658
08	—	−7,3699	15,060	0,1000	—	−2,9805
09	—	−7,7850	15,856	0,0953	—	−2,9953
6,10	—	−8,2355	16,739	0,0906	—	−3,0102
11	—	−8,7335	17,725	0,0859	—	−3,0251
12	—	−9,2939	18,832	0,0812	—	−3,0400
13	—	−9,9273	20,084	0,0765	—	−3,0549
14	—	−10,646	21,511	0,0717	—	−3,0699
6,15	—	−11,477	23,154	0,0669	—	−3,0850
16	—	−12,440	25,065	0,0621	—	−3,1001
17	—	−13,750	27,313	0,0572	—	−3,1152
18	—	−14,921	29,999	0,0523	—	−3,1304
19	—	−16,559	33,260	0,0474	—	−3,1456

Scanned with OKEN Scanner

Anexa 7 (continuare)

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
6,20	—	−18,591	37,308	0,0424	—	−3,1609
21	—	−21,176	42,464	0,0337	—	−3,1762
22	—	−24,576	49,255	0,0324	—	−3,1916
23	—	−29,527	58,596	0,0274	—	−3,2070
24	—	−36,100	72,270	0,0223	—	−3,2225
6,25	—	−47,067	94,186	0,0172	—	−3,2380
26	—	−67,436	135,03	0,0121	—	−3,2535
27	—	−118,88	237,77	0,0069	—	−3,2691
28	—	−492,67	985,32	0,0017	—	−3,2848
2π	—	$-\infty$	$+\infty$	0	—	−3,2898

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. Agent, R., *Sisteme reticulare nedeterminate.* Bucureşti, Editura tehnică, 1970.
2. Avram, C., *Grinzi continue.* Bucureşti, Editura Academiei RSR, 1981.
3. Bălan, St., Petru, V., *Calculul structurilor în domeniul plastic. Optimizări.* Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1979.
4. Bănuţ, V., *Calculul neliniar al structurilor.* Bucureşti, Editura tehnică, 1981.
5. Bănuţ, V., Popescu, H., *Stabilitatea structurilor elastice.* Bucureşti, Editura Academiei RSR, 1975.
6. Bănuţ, V., Socină, G., *Statica stabilitatea şi dinamica constructiilor. Aplicaţii.* Bucureşti, Institutul de construcţii, 1979.
7. Bănuţ, V., Mihăilescu, L., Socină, G., *Statica, stabilitatea şi dinamica construcţiilor.* Vol. 3. Bucureşti, Institutul de Construcţii, 1981.
8. Bârsan, G., *Dinamica şi stabilitatea construcţiilor,* Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1979.
9. Beyer, K., *Die Statik im Stahlbetonbau.* Berlin, Springer Verlag, 1956.
10. Cătărig, Al., Bănuţ, V., Mihăilescu, L., *Statica, stabilitatea şi dinamica construcţiilor. Calculul practic.* Vol. 1. Cluj-Napoca, Editura Dacia, 1984.
11. Cătărig. Al., Petrina, M., Cocheci, T., *Mecanica construcţiilor.* Vol. 3. Cluj-Napoca, Institutul Politehnic, 1978.
12. Darkov, A., *Stroitel'naja mehanika.* Moskva, Vyssaja skola, 1976.
13. Darkov, A., Kuznetsov, V., *Cours de Mécanique des constructions.* Moscou, Editions MIR, 1968.
14. Ghali, A., Neville, A. M., *Structural Analysis.* London, Chapman and Hall, 1977.
15. Gheorghiu, Al., *Statica construcţiilor.* Vol. 2. Bucureşti, Editura tehnică, 1965.
16. Gheorghiu, Al., *Statica construcţiilor.* Vol. 3. Bucureşti, Editura tehnică, 1980.
17. Gheorghiu, Al., *Statica, stabilitatea şi dinamica construcţiilor.* Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1974.
18. Hirschfeld, K., *Baustatik.* Berlin, Springer Verlag, 1965.
19. Ifrim, M., *Analiza dinamică a structurilor şi inginerie seismică.* Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1973.

Scanned with OKEN Scanner

20. Ifrim, M., Dobrescu, Al., *Aplicații în analiza dinamică a structurilor și inginerie seismică*. București, Editura didactică și pedagogică, 1974.
21. Ille, V., *Rezistența materialelor*. Vol. 2. Cluj-Napoca, Institutul politehnic, 1977.
22. Ivan, M., Vulpe, A., Bănuț, V., *Statica, stabilitatea și dinamica construcțiilor*. București, Editura didactică și pedagogică, 1982.
23. Klein, G., *Rukovodstvo k prakticeskim zanjatijam po kursu stroitel'noj mehaniki*. Moskva, Vyssaja skola, 1980.
24. Livesley, R., *Matrix Methods of Structural Analysis*. New York, Pergamon Press, 1964.
25. Massonet, Ch., Deprez, G., Maqui, R., Muller, R., Fonder, G., *Calculul structurilor la calculatoare electronice*. București, Editura tehnică, 1974.
26. Mazilu, P., *Statica construcțiilor*. Vol. 2. București, Editura tehnică, 1959.
27. Mazilu, P., Posea, N., Iordăchescu, E., *Probleme de rezistența materialelor*. Vol. 2. București, Editura tehnică, 1975.
28. Meek, L., *Matrix Structural Analysis*. New York, Mc Graw-Hill Book Comp., 1971.
29. Muhin, I., *Statika sooruzenij v primerah*. Moskva, Vyssaja skola, 1972.
30. Munteanu, I., *Calculul static al structurilor*. Timișoara, Editura Facla, 1976.
31. Munteanu, I., *Structuri pentru construcții, Teorie și calcul*. Vol. 1. București, Editura Academiei RSR, 1983.
32. Ping-Chun Vang., *Metode numerice și matriceale în Mecanica construcțiilor*. București, Editura tehnică, 1970.
33. Răutu, S., Bănuț, V., *Statica construcțiilor. Culegere de probleme*. București, Editura didactică și pedagogică, 1968.
34. Răutu, S., Bănuț, V., *Statica construcțiilor*. București, Editura didactică și pedagogică, 1972.
35. Row, D., Powell, G., *A substructure technique for nonliniar Static and Dynamic Analysis*. Berkeley, University of California, 1978.
36. Rubinstein, M., *Matrix Computer Analysis of Structures*. New Jersey, Prentice Hall, 1966.
37. Rubinstein, M., *Structural sistem—statics, dynamics and stability*. New Jersey, Prentice Hall, 1970.
38. Thompson, J., Hunt, G., *A general theory of elastic stability*. London, John Wiley and Sons, 1973.
39. Timoshenko, P. S., Gere, M. I., *Teoria stabilității elastice*. București, Editura tehnică, 1967.

Scanned with OKEN Scanner

VOLUMUL I CUPRINDE:

PREFAȚA

CALCULUL DE ORDINUL I AL STRUCTURILOR

GENERALITĂȚI
STRUCTURI STATIC DETERMINATE

Capitolul I
Calculul reacțiunilor

Capitolul II
Grinda dreaptă și sisteme de grinzi drepte

Capitolul III
Cadre static determinate

Capitolul IV
Structuri articulate

A. Structuri articulate plane
B. Structuri articulate spațiale

Capitolul V
Arce static determinate

Capitolul VI
Utilizarea principiului lucrului mecanic virtual la calculul eforturilor în structurile static determinate

Capitolul VII
Linii de influență la structuri static determinate

A. Grinda dreaptă și sisteme de grinzi drepte
B. Grinzi cu zăbrele plane
C. Arce static determinate
D. Moment încovoietor maxim și moment încovoietor maximum maximorum

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VIII
Deformarea structurilor elastice

Capitolul IX
Metode energetice în calculul structurilor

STRUCTURI STATIC NEDETERMINATE
METODA FORȚELOR

Capitolul X
Principiile metodei forțelor
A. Cadre static nedeterminate
B. Calculul cadrelor static nedeterminate utilizînd procedee pentru simplificarea ecuațiilor de condiție

Capitolul XI
Aplicații sistematizate ale metodei forțelor
A. Grinzi continue
B. Grinzi cu zăbrele static nedeterminate
C. Arce static nedeterminate

METODA DEPLASĂRILOR

Capitolul XII
Calculul structurilor prin rezolvarea directă a sistemului de ecuații

ANEXA 1

BIBLIOGRAFIE

Scanned with OKEN Scanner

Redactor: MONICA CREMENE
Tehnoredactor: CONSTANTIN RUSU

Apărut: 1985. Bun de tipar: 21.03.1985. Comanda nr.: 2544.
Coli de tipar: 21,25. Hîrtie: velină 70 g/mp. Format: 61×86/16

Tiparul executat sub comanda nr. 570/1984
la ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ CLUJ,
Municipiul Cluj-Napoca
B-dul Lenin nr. 146.
Republica Socialistă România

Scanned with OKEN Scanner